

Galerkin FE Diskretisierung

Claudia Fricke

30.01.2007

Übersicht

- Galerkin-Verfahren
- Finite Elemente Methode
- Modellbeispiel
- Analyse

Elliptisches RWP 2. Ordnung

Gesucht ist $u \in X := C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3) \cap C(\Omega \cup \Gamma_1)$
so dass die PDE

$$-\sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^m a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u(x) = f(x)$$

für alle $x \in \Omega$ gilt und die Randbedingungen

- $u(x) = g_1(x) \quad \forall x \in \Gamma_1$ (Dirichlet RB, 1.Art)
- $\frac{\partial u}{\partial N} := \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} n_i(x) = g_2(x) \quad \forall x \in \Gamma_2$ (Neumann RB, 2.Art)
- $\frac{\partial u}{\partial N} + \alpha(x)u(x) = g_3(x) \quad \forall x \in \Gamma_3$ (Robin RB, 3.Art)

erfüllt sind.

Anmerkungen (klassische Lsg)

- $u \in X$ heißt klassische Lösung des RWPs
- Rand von Gebiet Ω sei hinreichend glatt
- Angaben des RWPs müssen klassische Glattheitsvoraussetzungen erfüllen
(z.B: $a_{ij}(x) \in C^1(\Omega) \cap C(\Omega + \text{Rand})$)
- einheitliche Elliptizität auf Ω
- an Grenzflächen innerhalb Ω
(z.B. unterschiedliche Materialien)
zusätzliche "Übergangsbedingungen" festlegen

Galerkin-Verfahren

- allg. Variationsformulierung

Gesucht ist

$$u \in V_g \quad : \quad a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0$$

mit gegebener stetiger Bilinearform $a(\cdot, \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbf{R}^1$,
Hilbertraum V mit Skalarprodukt (\cdot, \cdot) und zugehöriger Norm $\|\cdot\|$
und gegebenem stetigen linearen Funktional $\langle F, \cdot \rangle : V_0 \longrightarrow \mathbf{R}^1$ mit $V_0 \subset V$.

Variationsformulierung

Gesucht ist $u \in V_g$, so dass $a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0$, wobei

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^m a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^m a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + auv \right) dx + \int_{\Gamma_3} \alpha uv ds$$

$$\langle F, v \rangle := \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_2} g_2 v ds + \int_{\Gamma_3} g_3 v ds$$

$$V_g := \{v \in V = H^1(\Omega) : v = g_1 \text{ auf } \Gamma_1\}$$

$$V_0 := \{v \in V : v = 0 \text{ auf } \Gamma_1\}$$

Anmerkungen (schwache Lsg.)

- $u \in V_g$ heißt schwache Lösung
- die Voraussetzungen an die Angaben des RWP's können abgeschwächt werden
(z.B: $a_{ij}(x)$ nur noch $\in L_\infty(\Omega)$)
- durch Homogenisierung der Darstellung können die Dirichlet-RBen direkt eingebaut werden

Beispiel CHIP (1)

- **Stationäres Wärmeleitungsproblem**

- Gebiet $\Omega = 2$ Teilgebiete

- Ω_I Silikon

$$\lambda = \lambda_I = 1 \text{ W/mK}$$

$$a = 0$$

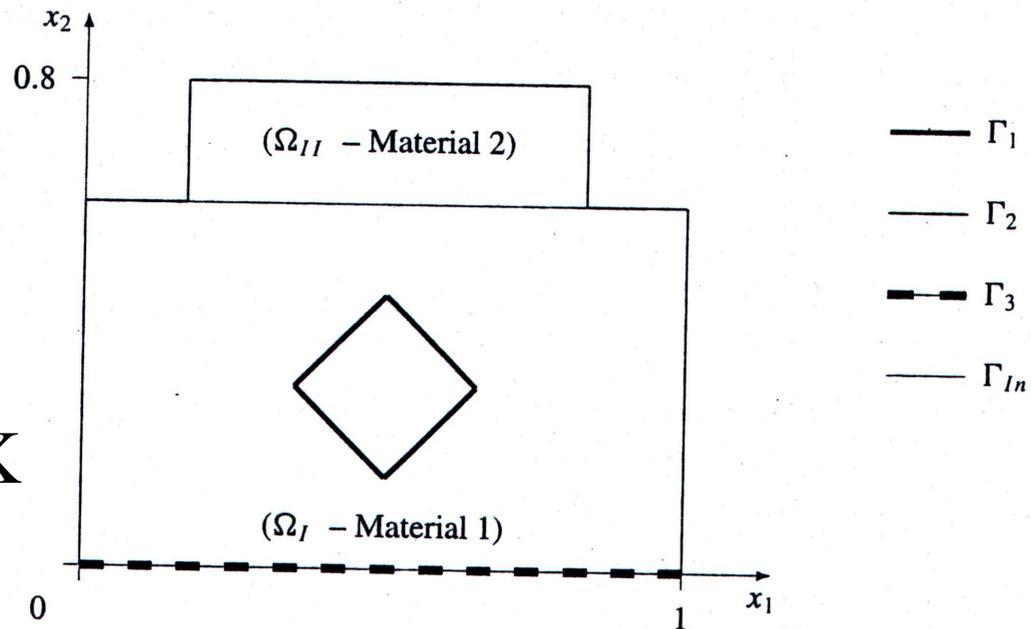
$$f = 0$$

- Ω_{II} Kupfer

$$\lambda = \lambda_I = 371 \text{ W/mK}$$

$$a = 0$$

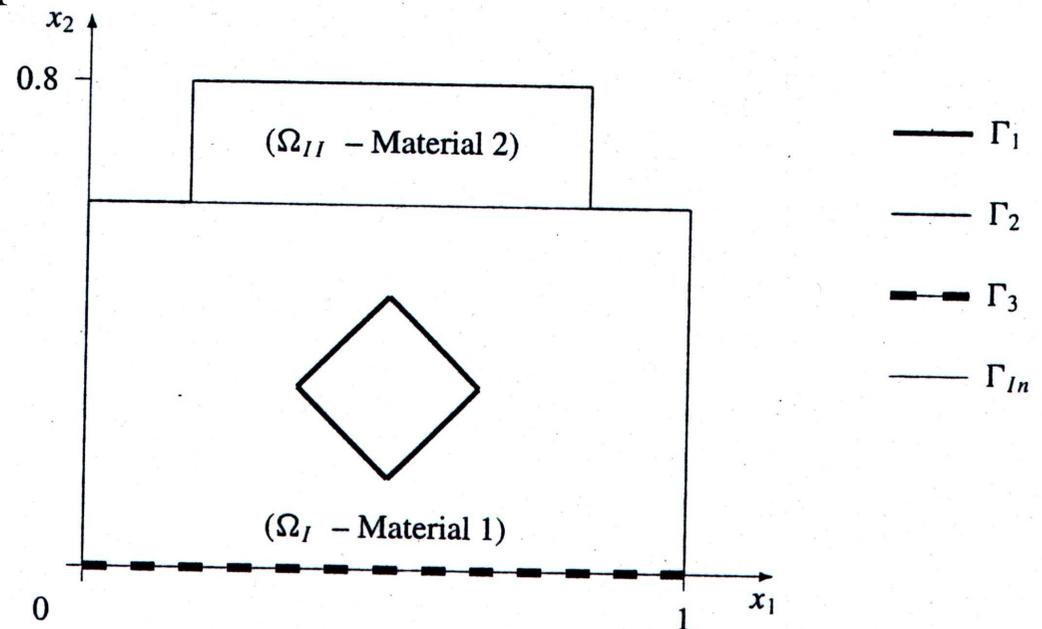
$$f = 0$$



Beispiel CHIP (2)

- Randdaten:

- $g_1 = 500\text{K}$ vorgegebene Temperatur auf Γ_1
- $g_2 = 0$, Wärmeisolation auf Γ_2
- $g_3 = \alpha u_e$ (RB 3. Art)
mit $\alpha = 5,6 \text{ W/m}^2\text{K}$ Wärmeübertragungskoeffizient
 $u_e = 300 \text{ K}$ Außentemperatur



Beispiel CHIP (3)

Finde die Temperaturverteilung $u \in V_g$,
so dass die Variationsgleichung

erfüllt ist, $a(u, v) = \langle F, v \rangle \quad \forall v \in V_0$

wobei die Bilinearform wie folgt aussieht (m=2)

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \left(\lambda \frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \frac{\partial v(x)}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u(x)}{\partial x_2} \frac{\partial v(x)}{\partial x_2} + a(x)u(x)v(x) \right) dx + \int_{\Gamma_3} \alpha uv \, ds$$

$\langle F, v \rangle$, V_g und V_0 wie bisher.

Existenz & Eindeutigkeit

Lax-Milgram

Ist $F \in V_0^*$ ein lineares stetiges Funktional,
 $a(\cdot, \cdot) : V_0 \times V_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf V_0 ,
 V_0 elliptisch und beschränkt,
dann existiert eine eindeutige Lösung $u \in V_0$ des
(homogenisierten) Variationsproblems.

Galerkin-Verfahren

- betrachte nur endlichdimensionalen Unterraum V_h
- V_h wird von linear unabhängigen Basisfunktionen $\varphi^{(i)}$ aufgespannt

$$V_h = \{v_h = \sum_i v^{(i)} \varphi^{(i)}\} \subset V$$

- Suche (Approximations-)Lösung

$$u_h \text{ in } V_{gh} = V_h \cap V_g$$

mit den zugehörigen Ansatzfunktionen

$$v_h \in V_{0h} = V_h \cap V_0$$

Galerkin-Verfahren (2)

Gesucht ist

$$u_h \in \mathbb{R}^{N_h} : K_h u_h = f_h$$

lineares System

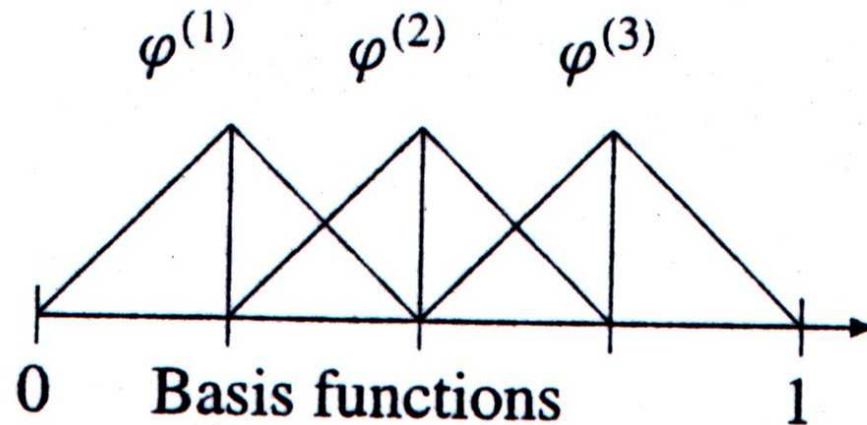
$$\text{mit } K_h = [a(\varphi^{(i)}, \varphi^{(k)})]_{k,i}$$

Steifigkeitsmatrix

$$\text{und } f_h = [\langle F, \varphi^{(k)} \rangle - \sum_i u_*^{(i)} a(\varphi^{(i)}, \varphi^{(k)})]_k \text{ Lastvektor}$$

FE-Schema

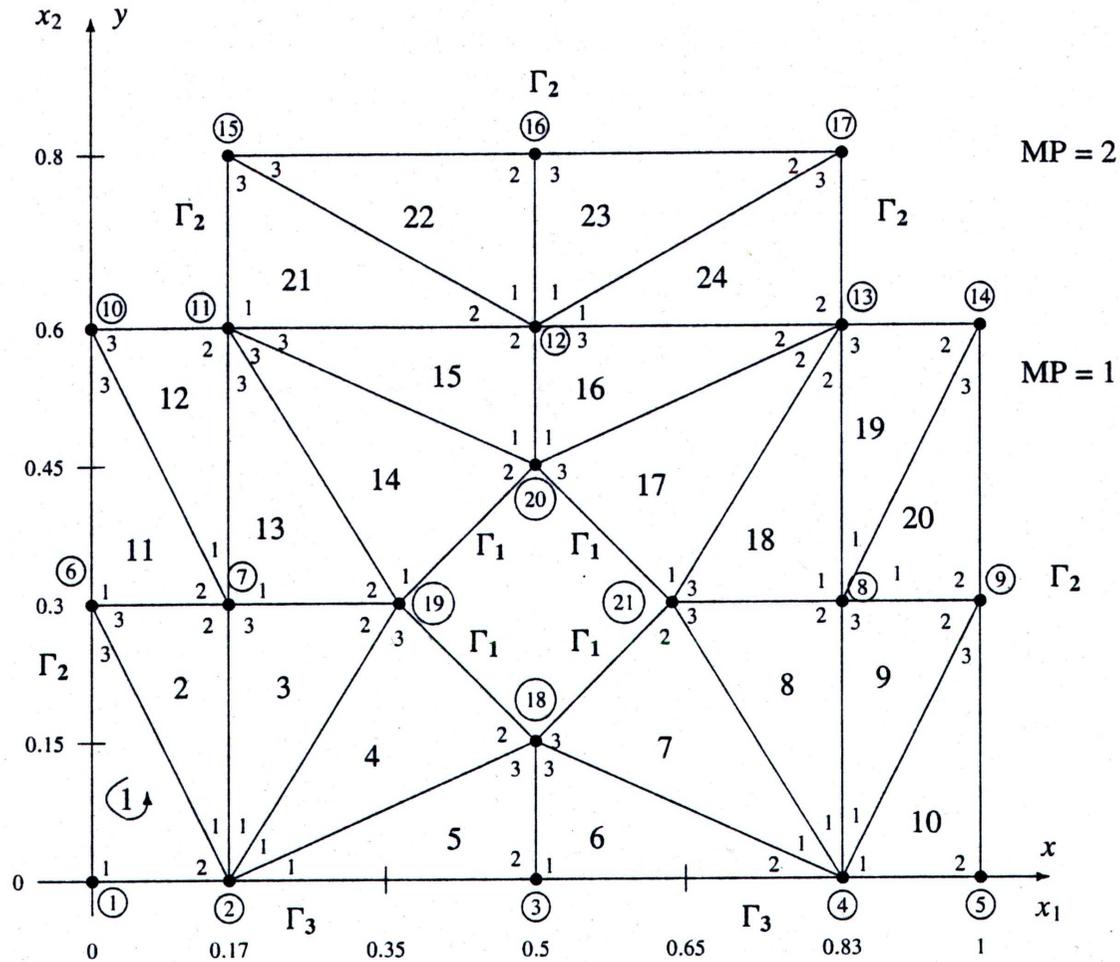
- Spezialfall des Galerkin-Verfahrens
- Grundidee: Ansatzfunktionen mit lokalem Träger
- dazu Zerlegung des Gebiets in "finite Elemente"
- Lösung: $u_h(x) = \sum_i u^{(i)} \varphi^{(i)}(x) \in V_{gh}$



Triangulierung

- zulässige, geeignete, diskrete Zerlegung des Gebiets
- Einführung geeigneter (globaler/lokaler) Nummerierung und Zuordnungstabellen
- Triangulierung abhängig von
 - Geometrie des Gebiets
 - Ausgangsdaten des RWPs
 - der geforderten Genauigkeit

Beispiel CHIP (4)



Zusammenführung der FE-Gleichungen

Gesucht ist $u_h \in \mathbb{R}^{N_h}$

so dass $K_h u_h = f_h$

mit $K_h = [a(\varphi^{(i)}, \varphi^{(k)})]_{k,i}$ Steifigkeitsmatrix

und $f_h = [\langle F, \varphi^{(k)} \rangle - \sum_i u_*^{(i)} a(\varphi^{(i)}, \varphi^{(k)})]_k$ Lastvektor

erfüllt ist

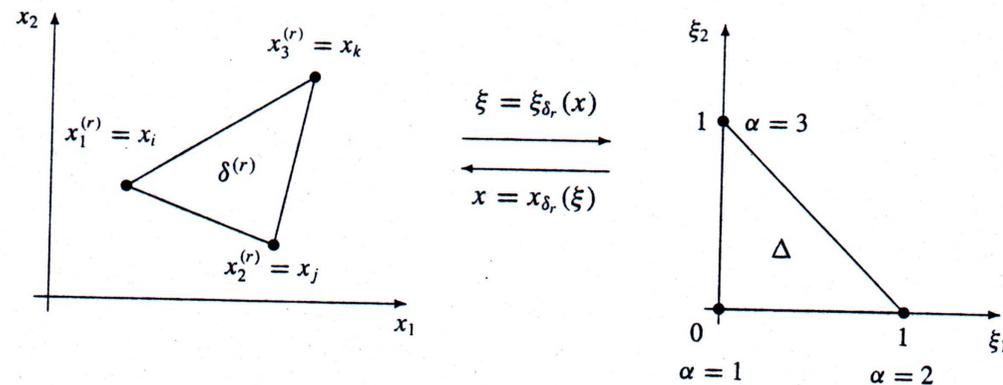
im Beispiel:

$$a(\varphi^{(i)}, \varphi^{(k)}) = \int_{\Omega} \left[\lambda_1 \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi^{(k)}}{\partial x_2} \right] dx + \int_{\Gamma_3} \alpha \varphi^{(i)} \varphi^{(k)} ds,$$

$$\langle F, \varphi^{(k)} \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi^{(k)}(x) dx + \int_{\Gamma_2} g_2(x) \varphi^{(k)}(x) ds + \int_{\Gamma_3} \alpha g_3 \varphi^{(k)} ds.$$

Element-Steifigkeitsmatrizen

- zunächst ignorieren der RBen
- Einsetzen von u_h und v_h in Bilinearform
- Berechnung der Koeffizienten über Transformation der Dreiecke auf Einheitsdreieck (einfache Integrale)



\Rightarrow Elementsteifigkeitsmatrizen $K^{(r)}$

globale Steifigkeitsmatrix K_h

- Einbau der Element-Steifigkeitsmatrizen nach und nach (Schleife über alle Elemente) in K_h

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \dots \quad 19 \quad 20 \quad 21 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 \vdots \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 \vdots \\
 19 \\
 20 \\
 21
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & K_{23}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & K_{33}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad \dots \quad 19 \quad 20 \quad 21 \\
 \begin{array}{c}
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 \vdots \\
 5 \\
 6 \\
 7 \\
 8 \\
 \vdots \\
 19 \\
 20 \\
 21
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & 0 & \dots & 0 & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & K_{23}^{(1)} + K_{13}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{31}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & K_{33}^{(1)} + K_{33}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & K_{21}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & K_{23}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Einbau der RBen 2. und 3. Art

- Vorauss.: Ω polygonal berandet
- indizieren der Kanten der FE-Dreiecke, die auf entsprechendem Rand liegen
- Transformation der Dreiecke wieder auf Einheitsdreieck

\implies zusätzliche Kantensteifigkeitsmatrizen $K^{(e)}$
(ebenfalls zu K_h addieren)

Fehlerabschätzungen

- aus Lax-Milgram

$$(a) \quad \|u_h - u_h^n\| \leq q^n \|u_h - u_h^0\| \quad (\text{a priori estimate}),$$

$$(b) \quad \|u_h - u_h^n\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|u_h^1 - u_h^0\| \quad (\text{a priori bound}),$$

$$(c) \quad \|u_h - u_h^n\| \leq \frac{q}{1-q} \|u_h^n - u_h^{n-1}\| \quad (\text{a posteriori bound}),$$

- aus Cea-Lemma

Abschätzung des Diskretisierungsfehlers

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{w_h \in V_{gh}} \|u - w_h\|$$

Ausblick

- aus Banachschem Fixpunktsatz ist ein iteratives Verfahren ableitbar
- ⇒ Nachteil: langsame Konvergenz auf feinem Gitter
- umgehbar mit Vorkonditionierung