Seminar Numerik und wissenschaftliches Rechnen

# Algebraische Flusskorrektur

WS 2006/07

von

Stefan Löbig

basierend auf

D. Kuzmin
*„On the design of general-purpose flux limiters for implicit FEM with a consistent mass matrix "*

und

D. Kuzmin, M. Möller
*„Algebraic Flux Correction I: Scalar Conservation Laws"*

# FE-Diskretisierung

Wir betrachten die zeitabhängige Kontinuitätsgleichung, die das Massenerhaltungsgesetz für einen skalaren Wert $u$ beschreibt,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}u) = 0 \qquad \text{in } \Omega, \tag{1}$$

wobei $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ein bekanntes nichtuniformes Geschwindigkeitsfeld ist. Die Anfangsdaten sind gegeben durch $u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$.
Die schwache Form von (1) erhält man durch Integration der gewichteten Residuen über dem Gebiet $\Omega$ und Nullsetzen dieses Integrals

$$\int_\Omega w \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}u)\right] \mathrm{d}\mathbf{x} = 0, \qquad \forall w. \tag{2}$$

Üblicherweise für FE-Methoden für Erhaltungsgesetze interpoliert man die konvektiven Terme genau so wie die numerische Lösung

$$u_h = \sum_j u_j \phi_j, \qquad (\mathbf{v}u)_h = \sum_j (\mathbf{v}_j u_j)\phi_j, \tag{3}$$

wobei $\phi_j$ die Basisfunktionen sind die den endlichdimensionalen Unterraum aufspannen.
Das Einsetzen von (3) in (2) liefert das folgende semidiskrete Problem

$$\sum_j \left[\int_\Omega \phi_i \phi_j \mathrm{d}\mathbf{x}\right] \frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} + \sum_j \left[\int_\Omega \phi_i \mathbf{v}_j \cdot \nabla \phi_j \mathrm{d}\mathbf{x}\right] u_j = 0.$$

Dies liefert ein System gewöhnlicher DGLn für die Knotenwerte der Näherungslösung, welches in Matrixschreibweise die folgende Form hat

$$M_C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Ku, \tag{4}$$

wobei $M_C = \{m_{ij}\}$ die konsistente Massenmatrix beschreibt und $K = \{k_{ij}\}$ ist der diskrete Transportoperator. Die Einträge der Matrizen sind gegeben durch

$$m_{ij} = \int_\Omega \phi_i \phi_j \mathrm{d}\mathbf{x}, \quad k_{ij} = -\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{c}_{ij}, \quad \mathbf{c}_{ij} = \int_\Omega \phi_i \nabla \phi_j \mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{5}$$

Für die Koeffizienten $\mathbf{c}_{ij}$ gilt $\sum_j \mathbf{c}_{ij} = 0$, solange in jedem Punkt $\sum_j \phi_j = 1$ gilt.

## Konservative Flusszerlegung

Kuzmin und Möller entwickelten eine Flusszerlegungstechnik, die auf allgemeine finite Elemente auf beliebigen Gittern anwendbar ist.
Durch partielle Integration in der schwachen Formulierung (2) und unter Berücksichtigung, dass die Zeilensummen der Koeffizienten $\mathbf{c}_{ij}$ verschwinden erhalten wir eine Zerlegung des Beitrags der konvektiven Terme zu inneren Punkten in eine Summe antisymmetrischer Flüsse zwischen den Knoten

$$(Ku)_i = -\sum_{j \neq i} g_{ij}, \qquad \text{mit } \; g_{ij} = (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{c}_{ij})u_i - (\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{c}_{ji})u_j.$$

Aufgrund der Tatsache, dass das Galerkin-Verfahren erhaltend ist, genügt es, wenn alle nachfolgenden Matrixoperationen auf diskreter Ebene diese Eigenschaft nicht verletzen. Dafür stellen wir die diskreten Diffusionsoperatoren vor. Sie sind als symmetrische Matrizen definiert

$$D = \{d_{ij}\}, \qquad d_{ij} = d_{ji},$$

deren Zeilen- und Spaltensummen verschwinden

$$\sum_i d_{ij} = \sum_j d_{ij} = 0.$$

Die Matrix $D$ ist üblicherweise dünn besetzt und die Nichtdiagonaleinträge können positiv ($\rightarrow$ Diffusion) oder negativ ($\rightarrow$ Antidiffusion) sein.

<<

Bekannte Repräsentanten dieser wichtigen Klasse von Matrizen sind die Folgenden:

- Der *diskrete Laplace-Operator*, der aus der Diskretisierung der zweiten Ableitungen nach der partiellen Integration in der schwachen Formulierung resultiert

$$d_{ij} = \int_\Omega \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

- Der *Stromlinien-Diffusionsoperator*, der eine Stabilisierung der konvektiven Terme durch künstliche Diffusion in der Stromlinienrichtung liefert

$$d_{ij} = \int_\Omega \mathbf{v} \cdot \nabla\phi_i \mathbf{v} \cdot \nabla\phi_j \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

- Der *Masse-Diffusionsoperator*, der durch die Differenz der konsistenten Massenmatrix und ihrem „lumped“Gegenstück gegeben ist

$$d_{ij} = \int_\Omega \phi_i(\phi_j - \delta_{ij})\mathrm{d}\mathbf{x},$$

  wobei $\delta_{ij}$ das Kronecker-Delta ist.

>>

Wenn man einen solchen diskreten Diffusionsoperator auf den Vektor $u$ der Knotenwerte anwendet, dann erhält man aufgrund der verschwindenden Zeilensummen

$$(Du)_i = \sum_j d_{ij} u_j = \sum_{j \neq i} d_{ij}(u_j - u_i)$$

Daher kann der Beitrag diffusiver Terme zum Knoten $i$ in eine Summe numerischer Flüsse zerlegt werden:

$$(du)_i = \sum_{j \neq i} f_{ij} \qquad \text{mit} \;\; f_{ij} = d_{ij}(u_j - u_i).$$

Der Fluss $f_{ij}$ von Knoten $j$ zum Knoten $i$ ist proportional zur Differenz der Knotenwerte und dies führt dazu, dass die Lösungsprofile steiler oder flacher werden, je nach Vorzeichen des Koeffizienten $d_{ij}$. Ausserdem liefert die Symmetrie der Matrix $D$ $f_{ji} = -f_{ij}$, so dass es keinen Netto-Verlust oder -Gewinn von Masse gibt.

## Entwurfskriterien

Zuerst stellen wir die algebraischen Bedingungen vor, die die diskreten Operatoren erfüllen sollten, um die Bildung unechter Über- und Unterschwingungen in der Nähe hoher Gradienten zu vermeiden.
Nehmen wir an, dass die semidiskrete Transportgleichung in der folgenden Form dargestellt werden kann:

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_j \sigma_{ij} u_j, \qquad \text{wobei} \;\; \sigma_{ii} = -\sum_{j \neq i} \sigma_{ij}. \tag{6}$$

Insbesondere ist die gültig für unser System von gewöhnlichen DGLn (4), falls $M_C$ durch ihr diagonales Gegenstück $M_L$ aus dem Zeilensummen-Massen-Lumping

$$\sigma_{ij} = \frac{k_{ij}}{m_i}, \qquad \text{mit} \;\; m_i = \sum_j m_{ij}, \;\; M_L = \mathrm{diag}\{m_i\}$$

ersetzt wird und das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ diskret divergenzfrei ist im Sinne von

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})_i = \frac{1}{m_i} \sum_j \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{c}_{ij} = -\sum_j \sigma_{ij} = 0.$$

## Algebraische Beschränkung I

Falls die Koeffizienten des numerischen Schemas verschwindende Zeilensummen haben, kann die rechte Seite von (6) durch die Nichtdiagonalelemente beschrieben werden

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j \neq i} \sigma_{ij}(u_j - u_i). \tag{7}$$

JAMESON zeigte, dass die negativen Koeffizienten in der obigen Gleichung verantwortlich sind für das Auftreten und Verstärken nichtphysikalischer Oszillationen. Falls nämlich $\sigma_{ij} \geq 0, \forall j \neq i$, dann ist die räumliche Diskretisierung in der $L_\infty$-Norm stabil, da

- Maxima sich nicht vegrössern: $u_i = \max_j u_j \quad \Rightarrow \quad u_j - u_i \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \leq 0,$
- Minima sich nicht verkleinern: $u_i = \min_j u_j \quad \Rightarrow \quad u_j - u_i \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} \geq 0.$

Die Koeffizientenmatrizen sind dünn besetzt, da die $\sigma_{ij} = 0$ gesetzt sind, solange die Knoten $i$ und $j$ nicht benachbart sind. Mit den gleichen Argumenten wie oben kann man zeigen, dass ein *lokales* Maximum sich nicht vergrössern und ein *lokales* Minimum sich nicht verkleinern kann. Deshalb sind semi-diskrete Schemata dieses Typs „*local extremum diminishing*“(LED - lokale Extrema vermindernd).
Falls an beiden Endpunkten die Dirichlet-Randbedingungen vorgegeben sind, kann die Gesamt-Variation der (stückweise linearen) Näherungslösung dargestellt werden als

$$TV(u_h) := \sum_i |u_{i+1} - u_i| = 2\left(\sum \max u - \sum \min u\right)$$

und wächst offensichtlich nicht an, solange die lokalen Maxima und Minima nicht anwachsen. Daher sind eindimensionale LED-Schemata notwendigerweise auch „*total variation diminishing*“(TVD - Gesamt-Variation vermindernd).

## Algebraische Beschränkung II

Nach der Zeitdiskretisierung muss eventuell eine zweite Bedingung erfüllt werden um sicherzustellen, dass die Lösungswerte nichtnegativ bleiben, falls es dafür physikalische Gründe gibt. Im Allgemeinen ist ein voll diskretes Schema *positivitäts-erhaltend*, wenn es in folgender Form dargestellt werden kann:

$$Au^{n+1} = Bu^n, \tag{8}$$

wobei $B = \{b_{ij}\}$ keine negativen Einträge hat und $A = \{a_{ij}\}$ ist eine sogenannte *M-Matrix*, d.h. $a_{ii} \geq 0$, $a_{ij} \leq 0$ für $j \neq i$, alle Komponenten von $A^{-1}$ sind nicht-negativ. Diese Eigenschaften führen dazu, dass die Positivität der alten Lösung $u^n$ übertragen wird auf $u^{n+1} = A^{-1}Bu^n$.

<<

Als nützliches Nebenprodukt liefert dieses algebraische Positivitätskriterium eine berchenbare Obergrenze für zulässige Werte des Zeitschrittes $\Delta t = t^{n+1} - t^n$. Das LED-System gewöhnlicher DGLn (7) in der Zeit diskretisiert durch ein standard $\theta$-Schema ist

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \theta \sum_{j \neq i} \sigma_{ij}^{n+1}(u_j^{n+1} - u_i^{n+1}) + (1-\theta) \sum_{j \neq i} \sigma_{ij}^n (u_j^n - u_i^n).$$

Für $\theta = 0$ ist dieses Schema in jedem Fall positivitäts-erhaltend. Für $0 \leq \theta < 1$ muss die folgende Bedingung erfüllt werden

$$1 + \Delta t(1-\theta) \min_i \sigma_{ii}^n \geq 0. \tag{9}$$

Man beachte, dass diese Schätzung nur von der Grösse der Diagonalelemente $\sigma_{ii}^n$ abhängt, wodurch sie sehr nützlich für eine adaptive Zeitschrittkontrolle wird.

>>

## Algebraische TVD-Flusskorrektur

Die Grundidee algebraischer Flusskorrektur ist es, die Gleichung in der Zeit durch eine beliebige lineare Methode hoher Ordnung (z.B. Galerkin FEM) zu diskretisieren und die daraus resultierenden Matrizen im Nachhinein so zu ändern, dass die Beschränkungen I und II eingehalten werden. Im Folgenden sind die benötigten algebraischen Manipulationen in der entsprechenden Reihenfolge aufgeführt, wobei der Zeitschritt $\Delta t$ wie oben beschrieben gewählt werden sollte.

1. Lineares Schema hoher Ordnung (z.B. Galerkin FEM)

$$M_C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Ku \qquad \text{so dass } \exists j \neq i : k_{ij} < 0$$

2. Lineares Schema niedriger Ordnung $\qquad L = K + D$

$$M_L \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Lu \qquad \text{so dass } l_{ij} \geq 0, \ \forall j \neq i$$

3. Nichtlineares hochauflösendes Schema $\qquad K^* = L + F$

$$M_L \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = K^* u \qquad \text{so dass } \exists j \neq i : k_{ij}^* < 0$$

$\rightarrow$ Äquivalente Darstellung $\qquad L^*u = K^*u$ ist LED

$$M_L \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = L^*u \qquad \text{so dass } \; l^*_{ij} \geq 0, \;\; \forall j \neq i$$

Zuerst wird ein Massen-Lumping durchgeführt und der Operator hoher Ordnung $K$ auf sein nichtoszillatorisches Gegenstück niedriger Ordnung $L$ transformiert, indem ein diskreter Diffusionsoperator addiert wird, der alle negativen Nichtdiagonalelemente auslöscht. Im nächsten Schritt wird überschüssige künstliche Diffusion entfernt. Dies geschieht durch eine begrenzte Menge kompensierender Antidiffusion $F$, die von dem lokalen Verhalten der Lösung abhängt und die Genauigkeit in glatten Regionen verbessert. Sowohl die diffusiven als auch die antidiffusiven Terme erlauben eine erhaltende Flusszerlegung, so dass die vorgeschlagenen Modifikationen nicht die Gesamtmasse verändern.

## Diskretes Upwinding

Als Anfangspunkt betrachten wir eine lineare Diskretisierung hoher Ordnung, z.B. unser semidiskretes Problem (4) für die Galerkin-Methode. Nach dem Massen-Lumping erfüllt jeder Knotenwert $u_i$ eine gewöhnliche DGL der Form

$$m_i \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j \neq i} k_{ij}(u_j - u_i) + \delta_i u_i, \qquad \text{mit } \; \delta_i = \sum_j k_{ij}.$$

Damit das begleitende Schema niedriger Ordnung LED ist, müssen alle Nichtdiagonaleinträge des linearen Operators $L = K + D$ nichtnegativ sein. Daher sind die optimalen Diffusionskoeffizienten gegeben durch

$$d_{ii} = -\sum_{j \neq i} d_{ij}, \qquad d_{ij} = \max\{0, -k_{ij}, -k_{ji}\} = d_{ji}. \tag{10}$$

Aufgrund der Konstruktion des Diffusionsoperators $D$ kann dieser zerlegt werden in eine Summe schief-symmetrischer Flüsse zwischen den Knoten

$$(Du)_i := -\sum_{j \neq i} f^d_{ij}, \qquad f^d_{ij} = d_{ij}(u_i - u_j) = -f^d_{ji}.$$

Die oben genannten Manipulationen führen zu dem gewünschten semi-diskreten Schema niedriger Ordnung

$$M_L \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Lu \qquad \text{so dass } \; l_{ij} \geq 0, \;\; \forall j \neq i. \tag{11}$$

In der Praxis wird die Elimination der negativen Nichtdiagonaleinträge Kante für Kante durchgeführt, ohne die globale Matrix $D$ aufzustellen. Nach der Initialisierung $L := K$ wird jedes Paar von Nichtdiagonaleinträgen $l_{ij}, l_{ji} \neq 0$ untersucht. Wenn der kleinere Eintrag negativ ist, wird er auf Null gesetzt und drei andere Einträge so modifiziert, dass die Zeilen-/Spaltensummen erhalten bleiben:

$$l_{ii} := l_{ii} - d_{ij}, \qquad l_{ij} := l_{ij} + d_{ij},$$
$$l_{ji} := l_{ji} + d_{ij}, \qquad l_{jj} := l_{jj} - d_{ij}.$$

O.B.d.A. richten wir die Kanten des Graphen so aus, dass $l_{ji} \geq l_{ij} = \max\{0, k_{ij}\}$ für die Kante $\overrightarrow{ij}$. Diese Orientierung impliziert, dass der Knoten $i$ *„upwind"* gelegen ist und mit der Zeilennummer des eliminierten negativen Eintrags (falls vorhanden) korrespondiert. Zusätzlich können die Knoten auch umnumeriert werden um $L$ in obere oder untere Drecksgestalt zu bringen.

**Beispiel 1** *Um das diskrete Upwinding in einer einfachen Umgebung zu erklären, betrachten wir das eindimensionale Gegenstück zu* (1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

*wobei die Geschwindigkeit $v$ als konstant und positiv angenommen wird. Das Gebiet $\Omega = (a, b)$ ist durch seine beiden Endpunkte definiert und am Inlet haben wir die Dirichlet-RB $x = a$.*
*Diese hyperbolische Gleichung ist im Raum diskretisiert durch eine Galerkin-Methode mit Massen-Lumping mittels einer stückweise linearen Approximation auf einem Einheitsgitter der Grösse $\Delta x$. Die entsprechenden $2 \times 2$-Matrizen sind gegeben durch*

$$\hat{M}_L = \frac{\Delta x}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \hat{K} = \frac{v}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Die zentrale-Differenzen-Diskretisierung des konvektiven Terms wird an inneren Punkten erhalten:*

$$\frac{du_i}{dt} = -v\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}.$$

*Der negative Eintrag in der oberen rechten Ecke von $\hat{K}$ verletzt das LED-Kriterium und sollte daher eliminiert werden. Zu diesem Zweck wird der künstliche Diffusionsoperator $\hat{D}$ so gewählt, dass er eine symmetrische Matrix mit verschwindenden Zeilen- und Spaltensummen ist und der Eintrag $\hat{l}_{12}$ des Operators $\hat{L} = \hat{K} + \hat{D}$ gleich null ist*

$$\hat{D} = \frac{v}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \hat{L} = v\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

*Das resultierende LED-Schema ist das am wenigsten diffusive unter den linearen Schemata. Bemerkenswerterweise ist es äquivalent zu der standard Upwind-Methode*

$$\frac{du_i}{dt} = -v\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$

*und ist unter der Bedingung* (9), *die sich auf*

$$v\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{1-\theta}, \qquad 0 \leq \theta < 1$$

*reduziert, positivitäts-erhaltend.*

Die rohen (raw) antidiffusiven Flüsse, die den Fehler durch Massen-Lumping und diskretes Upwinding so ausgleichen, dass das ursprüngliche Galerkin-Schema (4) erhalten bleibt, sind gegeben durch

$$f_{ij} = \left[m_{ij}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + d_{ij}\right](u_i - u_j) = f_{ij}^m + f_{ij}^d, \qquad f_{ij}^m = m_{ij}(\dot{u}_i - \dot{u}_j).$$

Man beachte dabei, dass der obere Ausdruck für $f_{ij}^m$ eine Zeitableitung enthält die noch diskretisiert werden muss. Um die Bildung unphysikalischer lokaler Extrema zu vermeiden, werden die rohen antidiffusiven Flüsse noch mit passenden Korrekturfaktoren multipliziert:

$$f_{ij}^* := \alpha_{ij} f_{ij}, \qquad \text{mit} \quad 0 \leq \alpha_{ij} \leq 1.$$

Setzt man diese Flüsse in die rechte Seite von (11) ein, so erhält man eine nichtlineare Kombination des Schemas niedriger Ordnung ($\alpha_{ij} \equiv 0$) und dem ursprünglichen Schema hoher Ordnung ($\alpha_{ij} \equiv 1$). Die Aufgabe des Flussbegrenzers ist es, einen optimalen Wert für jeden Korrekturfaktor $\alpha_{ij}$ zu finden, um so viel künstliche Diffusion wie möglich zu entfernen ohne unechte Oszillationen zu generieren.
Als heuristischen Konvergenzbeweis kann man anmerken, dass die numerischen Diffusionskoeffizienten normalisiert mit den Einträgen des diskreten Laplace-Operators proportional zur Gittergrösse sind. Also verschwinden sowohl die diffusiven als auch die antidiffusiven Flüsse im Grenzwert sehr feiner Gitter, so dass das flussbegrenzte Schema zu der gleichen Lösung konvergiert wie die ursprüngliche Gelerkin-Diskretisierung.

## Flusskerruktur in einer Dimension

Um einige nützliche Konzepte in einer eher einfachen Umgebung zu erklären, betrachten wir die eindimensionale lineare Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad v > 0$$

im Raum diskretisiert auf einem Einheitsgitter linearer finiter Elemente. Es ist bekannt, dass das Galerkin-Schema mit Massen-Lumping äquivalent ist zur Zentrale-Differenzen-Methode. In diesem Fall führt die Elimination negativer Nichtdiagonalelemente zu dem klassischen Upwind-Differenzen-Schema. Der zugehörige künstliche Diffusionskoeffizient (10) ist $d_{ij} = \frac{v}{2}$.
Im Rahmen klassischer TVD-Schemata ist die Methode hoher Ordnung üblicherweise über

den *Zielfluss* (target flux) definiert. In unserem Fall stellt dieser die Menge roher Antidiffusion dar, die die Upwind-Diskretisierung erster Ordnung auf das gewünschte Schema zweiter Ordnung transformiert. Nehmen wir rohe antidiffusive Flüsse der folgenden Form an

$$f_{ij} = \phi_i d_{ij}(u_i - u_j), \tag{12}$$

mit $j = i + 1$ und $\phi_i$ ist eine Funktion der Steigungsrate am Knoten $i$, z.B.

$$\phi_i = \xi + (1 - \xi)r_i, \qquad r_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{u_i - u_{i+1}}.$$

Für jeden beliebigen Wert von $0 \leq \xi \leq 1$ gibt die lineare antidiffusive Korrektur (12) die Upwind-Diskretisierung mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung wieder. Das Zentrale-Differenzen-Schema erhält man für $\xi = 1$, wohingegen $\xi = 0$ übereinstimmt mit einer Rückwärts-Differenzen-Approximation zweiter Ordnung.

Im Zuge der Flusskorrektur wird der Zielfluss $f_{ij}$ durch sein begrenztes Gegenstück $f^*_{ij} = \alpha_{ij} f_{ij}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, ersetzt wird, um sicherzustellen, dass das resultierende semi-diskrete Schema

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} + \frac{vu_{i+1/2} - vu_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \qquad vu_{i+1/2} := vu_i + f^*_{ij}$$

LED/TVD bleibt.

Ein Beispiel für einen begrenzten antidiffusiven Fluss eines klassischen TVD-Schemas ist folgender

$$f^*_{ij} := \max\{0, \min\{2, \phi_i, 2r_i\}\} d_{ij}(u_i - u_j).$$

Aufgrund seiner Konstruktion erlaubt der begrenzte antidiffusive Fluss die Darstellung $f^*_{ij} = c_{ik}(u_k - u_i)$, mit $k = i - 1$ und $c_{ik} \geq 0$. Das LED-Kriterium und die TVD-Bedingungen für den Knoten $j$ sind ebenfalls erfüllt, da der antidiffusive Fluss $f_{ji}$ neutralisiert wird durch den diffusiven Beitrag $l_{ji}(u_i - u_j)$ des Operators niedriger Ordnung.

Die oben gezeigte Interpretation von TVD-Schemata zeigt, dass sich die vielzähligen in der Literatur vorgeschlagenen Begrenzer-Funktionen nur in der Definition des zugrunde liegenden Zielflusses unterscheiden. Die bekanntesten dieser Art sind

| | |
|---|---|
| *minimod* | $\phi_i = \min\{1, r_i\}$, |
| *Van Leer* | $\phi_i = \frac{2r_i}{1+r_i}$, |
| *MC* | $\phi_i = \frac{1+r_i}{2}$, |
| *Koren* | $\phi_i = \frac{2+r_i}{3}$, |
| *superbee* | $\phi_i = \max\{1, r_i\}$. |