



11. Übungsblatt zur Mathematik I für Chemie und LaB

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Norm eines Vektors $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $f(x, y) = \ln(\|\vec{r}\|)$. Berechnen Sie den Gradienten

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{grad } \ln(\|\vec{r}\|)$$

für $(x, y) \neq (0, 0)$. Skizzieren Sie das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$ in der x - y -Ebene. Skizzieren Sie die Höhenlinien von $f(x, y)$ in der x - y -Ebene.

Aufgabe G2

Berechnen Sie den Gradienten

$$\vec{F}(x, y) = \text{grad} \left(\arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right)$$

für $x, y \neq 0$.

Aufgabe G3

Es seien $\vec{G}(\vec{r}) = \vec{G}(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$ und $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ zwei Vektorfelder. Das erste ist durch

$$g_1(x, y) = e^x \cos y$$

und

$$g_2(x, y) = e^x \sin y$$

definiert. Das zweite Vektorfeld wird durch

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

und

$$f_2(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$$

beschrieben. Berechnen Sie

- die Verkettung $\vec{F}(\vec{G}(\vec{r}))$,
- die Funktionalmatrix $J_G(\vec{r})$ und die Funktionaldeterminante $\det(J_G(\vec{r}))$ von \vec{G} an der Stelle $\vec{r} = (x, y)$,

- (c) die Funktionalmatrix $J_F(\vec{r})$ und die Funktionaldeterminante $\det(J_F(\vec{r}))$ von \vec{F} an der Stelle $\vec{r} = (x, y)$,
- (d) $J_F(\vec{G}(\vec{r}))$, d.h. die Funktionalmatrix von F an der Stelle $\vec{G}(\vec{r})$ und
- (e) das Produkt der Funktionalmatrizen $J_F(\vec{G}(\vec{r})) \cdot J_G(\vec{r})$.

Hausübung

Aufgabe H1

Es sei $\vec{F}(r, \varphi) = (f_1(r, \varphi), f_2(r, \varphi))$ ein Vektorfeld mit

$$f_1(r, \varphi) = r \cos \varphi$$

und

$$f_2(r, \varphi) = r \sin \varphi.$$

Rechnen Sie die Funktionalmatrix und die Funktionaldeterminante aus.

Aufgabe H2

Es sei $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ die Norm eines Vektors $\vec{r} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie den Gradienten

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{grad} \frac{1}{\|\vec{r}\|}$$

und skizzieren Sie das Gradientenfeld.

Aufgabe H3

Es sei $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ die Norm eines Vektors $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie den Gradienten

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{grad} e^{-\frac{\|\vec{r}\|^2}{2}}.$$

Hinweis:

Am Montag den 22.1.2007 von 16.15h bis 18.15h findet im Raum S103/226 die Probeklausur statt.