Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
18./21.12.2006

9. Übungsblatt zur Mathematik I für Chemie und LaB

Gruppenübung

Aufgabe G1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Benutzen Sie dabei das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[k]{k} \cdot q^k \;$ mit $|q| < 1$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

Hinweis: Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Aufgabe G2

Untersuchen Sie die Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $x_k = \left(3k^{-1}, \pi + \frac{17k}{k^2-4k+5}, \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i^2}\right)$

(b) $y_k = \left(\sqrt[k]{15}, -12, \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}, k^{-1}\sin(k)\right)$

Aufgabe G3

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to R$ mit $D(f) = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \cos(x+y) - y^{-1} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich.

Aufgabe G4

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = D(g) = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y^4}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sowie

$$g(x,y) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x-y}\right) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit in ihren Definitionsbereichen.

Hausübung

Aufgabe H1

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Benutzen Sie dabei das Wurzel- oder Quotientenkriterium.

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\left(\frac{1}{k}\right)^k$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$,

(c) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{2^k}$.

Aufgabe H2

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to R$ mit $D(f) = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{y} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich.

Aufgabe H3

Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $D(f) = D(g) = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sowie

$$g(x,y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x-y}\right) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y. \end{cases}$$

Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit in ihren Definitionsbereichen.
Hinweis: Betrachten Sie bei der Untersuchung der Funktion g die Folgen $(a_n, b_n) \subset \mathbb{R}^2$ mit $(a_n, b_n) = (x + \frac{1}{4\pi n}, x - \frac{1}{4\pi n})$ für ein $x \in \mathbb{R}$ sowie $(d_n, c_n) \subset \mathbb{R}^2$ mit $(c_n, d_n) = (x + \frac{1}{\pi(1+4n)})$.