Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Dipl.-Math. M. Heß

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

WS 2006/2007
20./23.11.2006

5. Übungsblatt zur Mathematik I für Chemie und LaB

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachten Sie die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad a_n := 1 + \frac{1}{n+\sqrt{n}}.$$

Begründen Sie, warum die Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Bestimmen Sie für $\varepsilon_1 = \frac{1}{10}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{30}$ und $\varepsilon_3 = \frac{1}{100}$ jeweils ein $N(\varepsilon_i) \in \mathbb{N}$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon_i \text{ für } n \geq N(\varepsilon_i), \quad i = \{1, 2, 3\}.$$

Aufgabe G2

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge

$$a_0 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$$

konvergiert und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis: Benutzen Sie das Monotoniekriterium, indem Sie zeigen, dass die Folge nach unten beschränkt und monoton fallend ist.

Aufgabe G3

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = (-1)^n 42$, $n \geq 0$,
(b) $b_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, $n \geq 1$,
(c) $c_n = \frac{5n+2}{n}$, $n \geq 1$.

Aufgabe G4

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!}$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n+2}{4n^3+1}$,
(iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$, (v) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Hinweis zu (v): $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Hausübung

Aufgabe H1

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei gegeben durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{a_1 + \ldots + a_n}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert, und geben Sie ihren Grenzwert an.
Hinweis: Betrachten Sie die Quotienten a_{n+2}/a_{n+1}, um das Monotoniekriterium anwenden zu können.

Aufgabe H2

Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz.

(a) $a_n = \frac{1}{3^n - n}$, $n \geq 0$,

(b) $b_n = n^2$, $n \geq 0$,

(c) $c_n = \frac{(n+2)^2}{n^3 - n + 1}$, $n \geq 0$.

Hinweis zu (a): Zeigen Sie zuerst mittels vollständiger Induktion $3^n \geq 2n$. Zeigen Sie dann, dass a_n eine Nullfolge ist.

Aufgabe H3

Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$, (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$, (iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{9n^2+2n+1} - 3n\right)$, (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2-n+4n^2}{n+2n^2+2n^4}$.