Fachbereich Mathematik
PD Dr. P. Neff
Dipl.-Phys. M. Hofmann-Kliemt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

WS 2006/2007
13.11./16.11.2006

4. Übungsblatt zur Mathematik I für Chemie und LaB

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es seien x und y natürliche Zahlen.

(a) Zeigen Sie

$$\binom{n+1}{0}\binom{n+1+x+y}{x}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+1+x+y}{k+x}$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+1+x+y}{k+x}$$

durch Nachrechnen.

(b) Zeigen Sie

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}\binom{n+1+x+y}{k+x}\right\}+\binom{n+1}{n+1}\binom{n+1+x+y}{n+1+x}$$
$$=\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\binom{n+1+x+y}{l+1+x}.$$

Hinweis: Schreiben Sie die Summen aus.

(c) Zeigen Sie daß

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+(x+y)}{k+x}=\binom{2n+(x+y)}{n+x}$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt durch vollständige Induktion nach n.
Hinweis: Verwenden Sie die Formel:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Aufgabe G2

Beweisen Sie die folgenden Formeln mit Hilfe der Additions-Theoreme für Sinus und Cosinus:

(a) $\sin 2x = 2 \sin x \, \cos x$

(b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

(c) $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$

Aufgabe G3

Zerlegen Sie das Polynom

$$x^4 - 2\,x^3 - 21\,x^2 + 22\,x + 40$$

in Linear-Faktoren.
Hinweis:
Raten Sie Nullstellen durch Ausprobieren und spalten Sie mit Polynomdivision entsprechend die Linear-Faktoren ab.

Hausübung

Aufgabe H1

Zerlegen Sei das Polynom

$$24 + 10\,x - 15\,x^2 + x^4$$

in Linear-Faktoren.

Aufgabe H2

Beweisen Sie mit Hilfe der Additions-Theoreme für Sinus und Cosinus:

$$\cos^3 x = \frac{3}{4} \cos\, x + \frac{1}{4}\, \cos\, 3x.$$

Aufgabe H3

Zeigen Sie, daß

$$\binom{2n+2}{n+1} = 2 \binom{2n+1}{n}$$

gilt.

Aufgabe H4

(a) Rechnen Sie nach:

$$\binom{n+m}{m} \binom{n}{n-k} = \binom{n+m}{k} \binom{n+m-k}{m}.$$

(b) Testen Sie die Formel an einem Zahlenbeispiel mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks.