30. November 2006

7. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

Aufgabe G1: (Bedingte Erwartung)
Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\mu(\Omega) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ und $\mu(A_i) \neq 0$, für alle $1 \leq i \leq n$. Die von $A_1, \ldots, A_n$ erzeugte σ- Unteralgebra von Σ bezeichnen wir mit Σ_0.

(a) Zeigen Sie: Die Menge

$$V = \{f \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \ : \ f \text{ ist messbar bezüglich } \Sigma_0\}.$$

ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathcal{H}$.
Hinweis: Wie sehen Elemente von V aus?

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion P von $\mathcal{H}$ auf V.
Hinweis: Welche Eigenschaft hat $f - Pf$?

Bemerkung: Handelt es sich bei μ um ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so bezeichnet man $P(f)$ als *bedingte Erwartung von f gegeben* Σ_0 und schreibt dafür $E(f|\Sigma_0)$.

Aufgaben G2: (Approximation durch Polynome)
Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte komplexe Zahlen a, b, c gibt, so dass

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|^2 \, dx$$

minimal wird, d.h. , unter allen Polynomen vom Grad ≤ 2 existiert ein eindeutiges Polynom, das das Polynom p mit $p(x) = x^3$ im obigen Sinn am besten approximiert. Berechnen Sie die Zahlen a, b, c.

Aufgaben G3: (Satz von Hahn-Banach in Hilberträumen)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, M ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ und $f : M \to \mathbb{C}$ ein stetiges lineares Funktional auf M.

(a) Zeigen Sie: Es existiert ein lineares Funktional $\overline{f} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, welches f fortsetzt, d.h. $\overline{f}|_M = f$.

(b) Weisen Sie nach, dass es genau eine Fortsetzung $\overline{f}$ gibt mit $\|\overline{f}\| = \|f\|$. (Diese Aussage ist in vielen Banachräumen falsch!)

(c) Gelten obige Aussagen auch, wenn $\mathcal{H}$ ein Prä-Hilbertraum ist?

Aufgaben G4:
Finden sie ein einfaches Beispiel zweier Wahrscheinlichkeitsmaße μ und ν, so dass es eine μ-Nullmenge N gibt mit $\nu(N) = 1$.

Aufgaben G5: (Skalarprodukt und linearer Operator)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{C}$. Ferner sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ein linearer Operator mit $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass $T = 0$ ist. Ist die Aussage auch wahr, wenn $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$ ist?

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Die große Projektionsaufgabe)(7 Punkte)

(a) Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $L^2([-1,1])$. Wir definieren die lineare Abbildung

$$U : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ (Uf)(t) = f(-t).$$

Sei F der abgeschlossene lineare Teilraum $F := \{f \in \mathcal{H} \ :\ U(f) = f\}$. Bestimmen Sie den Raum $F^\perp$ und die orthogonale Projektionen P_F und $P_{F^\perp}$ von $\mathcal{H}$ auf F und $F^\perp$.
Hinweis: Untersuchen Sie $f - P_F f$ und $U(f - P_F f)$, sowie deren Summe.

(b) Sei $\mathcal{H}$ der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ferner sei S_n die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Für $\sigma \in S_n$ definieren wir den unitären Operator

$$(U_\sigma f)(t_1, \ldots, t_n) = f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(n)}).$$

Ferner sei $F := \{f \in \mathcal{H} \ :\ U_\sigma f = f \text{ für alle } \sigma \in S_n\}$.

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf F.

(c) Abstrakt sieht das ganze so aus: Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Ausserdem sei die Abbildung $\pi : G \to \mathcal{L}(H)$ mit $\pi(g) = U_g$, wobei U_g ein unitärer Operator auf $\mathcal{H}$ ist, ein Gruppenhomomorphismus,
d.h. $U_g \cdot U_h = \pi(g) \cdot \pi(h) = \pi(g \circ h) = U_{g\circ h}$.
Zeigen Sie: Die Projektion P auf den Fixraum
$F := \{x \in \mathcal{H} \ :\ U_g x = x \text{ für alle } g \in G\}$ ist durch

$$P = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} U_g$$

gegeben.

(d) Sei $0 \neq x \in \mathcal{H}$ und M die abgeschlossene konvexe Hülle der Menge $\{U_g x : g \in G\}$.

Zeigen Sie: M besitzt ein eindeutig bestimmtes Element v mit minimaler Norm und es gilt: $\{v\} = M \cap F$.

Spezialaufgabe für Liebhaber:
Auf dem Intervall $[0,1]$ sei λ das Lebesgue-Maß.
Sei $S \subseteq [0,1]$ definiert als

$$S := \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[\cup \left]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right[\dots$$

Sei $C := [0,1] \setminus S$.

a) Zeigen Sie: $\lambda(C) = 0$.

   (Hinweis: Was ist $\lambda(S)$?)

b) Sei eine Funktion τ auf S definiert durch

   $\tau(x) = \frac{1}{2}$ für $x \in]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$,

   $\tau(x) = \frac{1}{4}$ für $x \in]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[$,

   $\tau(x) = \frac{3}{4}$ für $x \in]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[$, etc.

   Machen Sie sich klar: τ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einer stetigen Funktion τ auf $[0,1]$ (Sie brauchen den Beweis nicht im einzelnen ausarbeiten). τ ist auf S differenzierbar und hat dort die Ableitung 0.

c) Ein Satz aus der Maßtheorie besagt:

   Es gibt genau ein Maß ν auf der Borel-δ-Algebra von $[0,1]$ mit

   $$\nu([a,b]) = \nu(]a,b[) = \tau(b) - \tau(a) \ .$$

   Zeigen Sie: ν ist singulär bezüglich λ.

d) Zusatz: Zeigen Sie: C ist überabzählbar.

   Hinweis: Charakterisieren Sie die Punkte $x \in C$ durch ihre triadische Entwicklung.

Also: C ist überabzählbar und kompakt, das Komplement ist dicht und hat Lebesguemaß 1. Sicher haben Sie inzwischen bemerkt, dass C unter dem Namen „Cantormenge“ berühmt ist.