23. November 2006

6. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

Aufgabe G1: (Ein bisschen Wahrscheinlichkeitstheorie)
Gegeben seien zwei reellwertige Zufallsvariablen X und Y mit endlichen Erwartungswerten und endlichen Varianzen. Zeigen Sie: Ist die Korrelation zwischen X und Y gleich ± 1, so müssen X und Y einer Gleichung $Y = aX + b$ genügen mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgaben G2: (Hilbertraumnorm)
Sei $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ ein Prähilbertraum

(i) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathcal{H}, \|x\| = \|y\| = 1$ und $x \neq y$ ist $\|\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\| < 1$.

(ii) Interpretieren Sie die Aussage aus (i) geometrisch: Wie sieht die Einheitskugel von $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ aus?

(iii) Zeigen Sie mit Hilfe von (i), dass die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{C}^n$ nicht von einem Skalarprodukt erzeugt werden.

Aufgaben G3:
Sei $(E, \|\cdot\|)$ endlich-dimensionaler normierter Raum, $M \subseteq E$ vollständige Teilmenge.

a) Zeigen Sie: Für $x \in E$ existiert immer ein Punkt $z \in M$ mit $\| x - z \| = d(x, M) = \inf\{\| x - y \| : y \in M\}$.

b) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel: Selbst für konvexes M muss z nicht notwendig eindeutig bestimmt sein (Hinweis $E = \mathbb{R}^2$ reicht aus).

Aufgaben G4: (Orthogonalraum)
Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum

(a) Es seien M, N zwei abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$ mit $M + N = \mathcal{H}$ und $\langle x, y\rangle = 0$, für alle $x \in M$ und $y \in N$. Beweisen Sie, dass $N = M^\perp$ ist.

(b) Sei $A \subseteq \mathcal{H}$. Zeige: $A^\perp = \overline{\mathrm{LH}(A)}^\perp$, wobei $\mathrm{LH}(A)$ die lineare Hülle von A bezeichnet.

Aufgaben G5: (Eine orthogonale Projektion, vgl. Vorlesung Beispiel 4.14.i))
Sei $\mathcal{H} = L^2([0,1], \lambda)$ und $\mathcal{K} := \{f \in \mathcal{H} : f(x) = 0$ für $0 \leq x < \frac{1}{2}$ f.ü.$\}$, $\chi_{[\frac{1}{2},1]}$ die charakteristische Funktion von $[\frac{1}{2}, 1]$.
Zeigen Sie: $\mathcal{K}$ ist abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ und die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{K}$ ist gegeben durch

$$f \mapsto \chi_{[\frac{1}{2},1]} \cdot f \quad \text{für} \quad f \in \mathcal{H}\,.$$

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Positiv definite Folgen)(6 Punkte)
Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ heißt positiv definit, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) $a_n = \overline{a}_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und beliebige komplexe Zahlen $z_{-n}, z_{-n+1}, \ldots, z_{n-1}, z_n$ ist

$$\sum_{-n\leq i,j\leq n} a_{j-i}\overline{z}_i z_j \geq 0\,,$$

wobei die Gleichheit genau dann gilt, wenn $z_{-n} = z_{-n+1} = \ldots = z_{n-1} = z_n = 0$ ist.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{C}$ ist positiv definit.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die $(2n+1)\times(2n+1)$-Matrix $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} := a_{j-i}$ positiv definit.

(c) Auf dem Raum der endlichen Folgen
$\Phi(\mathbb{Z}) = \{f = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{C} \;:\; f_n \neq 0$ für nur endlich viele $n \in \mathbb{Z}\}$ definiert
$\langle f, g\rangle := \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} a_{n-m}\overline{f}_m\, g_n$ ein Skalarprodukt.