16. November 2006

5. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

Aufgaben G1: (Unendlich große Matrizen, Nachtrag)
Gegeben sei $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{j,k} \in \mathbb{C}$ und $M := \sup\{|a_{j,k}| \ : \ j,k \in \mathbb{N}\} < \infty$.
Für $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ definiere $Ax := y$ mit $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $y_j =: \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}x_k$.

(a) Zeigen Sie, dass $A : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ eine stetige lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie die Operatornorm von A.

Aufgaben G2: (Integraloperator, Nachtrag)
Sei $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Definiere eine Abbildung T als

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy \qquad \text{für } f \in (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty).$$

(a) Zeigen Sie, dass $T : (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ein stetiger Operator ist.

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\|T\|_{\text{op}}$.

(c) Berechnen Sie $\|T\|_{\text{op}}$ für den Fall, dass $k(x,y) \neq 0$ für alle $x,y \in [a,b]$ ist.

(d) Erläutern Sie die Analogie zu Aufgabe G3.

Aufgaben G3: (Vermischte Aufgaben)
Seien $(E, \|\cdot\|_1)$, $(F, \|\cdot\|_2)$ normierte Räume.

(a) Zeigen Sie, dass jede stetige lineare Abbildung von E nach F gleichmäßig stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Kern einer stetigen linearen Abbildung von E nach F abgeschlossen ist.

(c) Sei $(E, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum, $(F, \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum und A eine stetige lineare Abbildung $A : E \to F$. Ferner gebe es eine Konstante $c > 0$ so, daß $\|Ax\|_2 \geq c\|x\|_1$ ist für alle $x \in E$.
Zeigen Sie, dass das Bild $\operatorname{Im} A$ von A abgeschlossen ist.

Aufgaben G4: (L^p-Räume)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $\mu(\Omega) < \infty$.

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der Hölder-Ungleichung
(zur Erinnerung: $\| f \cdot g \|_r \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q$ für $f \in L^p$, $g \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$)
Für $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ ist

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p - 1/p'} \cdot \|f\|_{p'} \quad , \ f \in L^{p'}(\Omega, \Sigma, \mu).$$

(b) Ordnen Sie die $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$-Räume bezüglich der Relation "$\subset$".

(c) Wir betrachten für $1 \leq p \leq \infty$ die lineare Abbildung

$$I : L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}, \ f \mapsto \int_\Omega f \, d\mu.$$

Zeigen Sie, dass I stetig ist.

(d) Zeigen Sie: Für $p, p' \in [1, \infty]$, $p \neq p'$ ist $L^p(\mathbb{R}, \lambda) \not\subset L^{p'}(\mathbb{R}, \lambda)$, wobei λ für das Lebesgue-Maß steht.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Multiplikationsoperator)(5 Punkte)
Gegeben sei die stetige Funktion $g \in \mathcal{C}([0,1])$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$M_g : \mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_p) \to \mathcal{C}([0,1], \|\cdot\|_p) \quad \text{mit } M_g(f)(t) = g(t) \cdot f(t) \ (t \in [0,1]).$$

(a) Berechnen Sie die Operatornorm von M_g für $1 \leq p \leq \infty$.

(b) Sei $g = \text{id} : t \mapsto t$ und $p = \infty$. Zeigen Sie, dass M_g kein abgeschlossenes Bild besitzt und dass

$$\overline{\operatorname{Im} M_g} = \{f \in \mathbb{C}([0,1]) \ : \ f(0) = 0\}$$

der Abschluss von $\operatorname{Im} M_g$ ist.