09. November 2006

4. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

Aufgabe G1: (Normierte Räume)
Führen Sie den Beweis von 3.3 der Vorlesung aus:

Seien $(E\ ,\ \|\cdot\|_1)$ und $(E\ ,\ \|\cdot\|_2)$ normierte Räume. Zeigen Sie

i) $\mathcal{L}(E,F)$ ist ein Vektorraum und $\|\cdot\|_{op}$ ist eine Norm auf $\mathcal{L}(E,F)$.

ii) Ist F Banachraum, dann ist auch $(\mathcal{L}(E,F)\ ,\ \|\cdot\|_{op})$ ein Banachraum.

Aufgaben G2: (Grundraumtransformation)
Gegeben sei eine stetige Funktion $h : [0,1] \to [0,1]$. Wir definieren den Operator T_h auf $\mathcal{C}([0,1])$ durch:

$$T_h(u) := u \circ h.$$

(a) Zeigen Sie, dass $T_h : (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ eine beschränkte lineare Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Operatornorm von T_h.

(c) Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:

  (i) h ist injektiv genau dann, wenn T_h surjektiv ist.

  (ii) h ist surjektiv genau dann, wenn T_h injektiv ist.

Bemerkung: Die Abbildung h wird auch als Grundraumtransformation bezeichnet.

Aufgaben G3: (Unendlich große Matrizen)
Gegeben sei $(a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{j,k} \in \mathbb{C}$ und $M := \sup\{|a_{j,k}|\ :\ j,k \in \mathbb{N}\} < \infty$.
Für $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})$ definiere $Ax := y$ mit $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}},\ \ y_j =: \sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}x_k$.

(a) Zeigen Sie, dass $A : \ell^1(\mathbb{N}) \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ eine stetige lineare Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie die Operatornorm von A.

Aufgaben G4: (Integraloperator)
Sei $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung. Definiere eine Abbildung T als

$$(Tf)(x) := \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy \qquad \text{für } f \in (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty).$$

(a) Zeigen Sie, dass $T : (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ ein stetiger Operator ist.

(b) Bestimmen Sie eine obere Schranke für $\|T\|_{\mathrm{op}}$.

(c) Berechnen Sie $\|T\|_{\mathrm{op}}$ für den Fall, dass $k(x,y) \neq 0$ für alle $x, y \in [a,b]$ ist.

(d) Erläutern Sie die Analogie zu Aufgabe G3.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Quotientenräume)(5 Punkte)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und H_0 ein abgeschlossener Teilraum von E. Wie in der Vorlesung sei $\|\cdot\|_0$ die Norm auf dem Quotienten E/H_0.

(a) Sei $\mathcal{C}_0([0, \frac{1}{3})) := \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]) \ : \ f(x) = 0 \text{ für } x \in [\frac{1}{3}, 1] \right\}$.
Geben Sie einen Vektorraum stetiger Funktionen an, der isometrisch isomorph zu $(\mathcal{C}([0,1])/\mathcal{C}_0([0, \frac{1}{3})), \|\cdot\|_0)$ ist.

(b) Bestimmen Sie eine überabzählbare Teilmenge M der abgeschlossenen Einheitskugel von $(\ell^\infty(\mathbb{N})/c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_0)$ mit der Eigenschaft, dass $\|x - y\|_0 = 1$ für $x, y \in M, \ x \neq y$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie Null-Eins-Folgen. Wann sind zwei Null-Eins-Folgen in derselben Äquivalenzklasse.

c) Vervollständigen Sie den Beweis der Vollständigkeit der Vervollständigung eines normierten Raumes in 2.26 der Vorlesung.

(Warum ist auch hier die Überschrift „Quotientenräume“ gerechtfertigt?)