02. November 2006

3. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

Aufgabe G1: (Abschluß u.a.)

(a) Berechnen Sie das Innere und den Abschluss der Menge $A := \{f \in \mathcal{C}([-1,1]) : f > 0\}$ in $(\mathcal{C}([-1,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

(b) Berechnen Sie das Innere und den Abschluss der Menge $B := \{f \in L^1([-1,1]) : f > 0 \text{ fast überall}\}$ in $L^1([-1,1], \|\cdot\|_1)$.

Aufgaben G2: (Wesentliches Supremum)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to [-\infty, \infty]$ eine messbare Funktion. Wir definieren

$$N_\infty(f) := \inf\{\alpha \in [0,\infty] : |f| \leq \alpha \quad \mu - \text{fast überall}\}.$$

$N_\infty(f)$ bezeichnet man als das wesentliche Supremum von f.
Sei $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) := \{f : \Omega \to [-\infty, \infty],\ N_\infty(f) < \infty\}$.

(a) Zeigen Sie: N_∞ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

(b) Wir betrachten auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ die folgende Äquivalenzrelation: $f \sim g$ genau dann, wenn $f = g$ μ-fast überall ist. Weisen Sie nach, dass $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)/_\sim$ ist mit $\|[f]\|_\infty := N_\infty(f)$, wobei $[f]$ die Äquivalenzklasse von $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ bezeichnet.

Aufgaben G3: (Summe von Banachräumen)
Gegeben seien zwei Banachräume $(E, \|\cdot\|_1)$ und $(F, \|\cdot\|_2)$.
Zeigen Sie: Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(E \bigoplus F, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum, wobei $\|x \oplus y\|_p := (\|x\|_1^p + \|y\|_2^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ bzw. $\|x \oplus y\|_\infty := \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$ ist.

Aufgaben G4: (Banachraumwertige stetige Funktionen)
Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und K eine kompakte Menge, ferner sei $f : K \to E$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| \ : \ x \in K\}$ existiert, und dass somit durch $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf dem Raum $\mathcal{C}(K; E)$ der stetigen Funktionen mit Werten in E definiert wird (das hatten wir schon in der Vorlesung kurz angesprochen).

Zeigen Sie nun: Ist E ein Banachraum, dann ist auch $\mathcal{C}(K; E)$ ein Banachraum (Sie können zur Vereinfachung auch $K = [0,1]$ annehmen).

Aufgaben G5: (Vervollständigung, falls noch Zeit ist)
Vervollständigen Sie den Beweis der Vollständigkeit der Vervollständigung eines normierten Raumes in 2.26 der Vorlesung.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1:
(Geometrische Interpretation von Normen und konvexe Mengen)(7 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und $K \subset V$ eine Teilmenge von V mit folgenden Eigenschaften:

(i) K ist konvex.

(ii) K ist absorbierend, d.h. $\forall\, x \in V \;\exists\, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0 \;:\; x \in \alpha \cdot K := \{\alpha k \mid k \in K\}$.

(iii) K ist kreisförmig, d.h., $\forall\, x \in K \quad \forall\, \beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| = 1$ ist $\beta x \in K$.

(a) Zeigen Sie: Durch $\|x\| := \inf\{\alpha > 0 \mid x \in \alpha \cdot K\}$ wird eine Halbnorm auf V definiert.

(b) Welche Eigenschaft einer Halbnorm ist nicht erfüllt, wenn man die Eigenschaft (i) (bzw. (ii), bzw. (iii)) nicht berücksichtigt?

(c) Sei $V = \mathbb{R}^n$, $0 < p < \infty$ und $K_p := \Big\{x \in V \;:\; \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \leq 1\Big\}$. Für welche p erfüllt K_p obige Eigenschaften? (Vgl. auch Teilaufgabe (f))

(d) Wie muss K beschaffen sein, dass die in Aufgabenteil (a) definierte Halbnorm eine Norm ist. Gebe ein Beispiel an, bei dem K nur eine Halbnorm erzeugt.

(e) Ein Element x einer konvexen Menge K heißt *Extremalpunkt* von K, falls aus $x = \lambda y + (1 - \lambda) z$ mit $y, z \in K$ und $\lambda \in [0, 1]$ folgt, dass $y = x = z$ ist.

Sei nun $K := \{x \in X \;:\; \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel eines normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$. Zeigen Sie: $\|x\| = 1$ für jeden Extremalpunkt x von K.

(f) Sei $E = \mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Einheitskugeln bezüglich den Normen

- $\|x\|_1 := |x_1| + |x_2|, \qquad x = (x_1, x_2) \in X,$
- $\|x\|_2 := (|x_1|^2 + |x_2|^2)^{1/2}, \quad x = (x_1, x_2) \in X,$
- $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|\}, \quad x = (x_1, x_2) \in X.$

(g) Bestimmen Sie die Extremalpunkte obiger Einheitskugeln.

(h) Weisen Sie nach, dass in

$$E := \mathcal{C}([0,1]), \text{ mit } \|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\, dt$$

die Einheitskugel K keinen Extremalpunkt besitzt. Hierbei sei, wie üblich, $\mathcal{C}([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$.