25. Oktober 2006

2. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

Aufgabe G1: (Wenn Pythagoras das geahnt hätte ...)
Wann gilt für zwei Vektoren x und y in einem Hilbertraum der „Satz des Pythagoras“ $\| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2$?

Aufgaben G2: (Nicht alle Räume sind Hilberträume)

a) Es Sei $\mathcal{H}$ ein Prä-Hilbertraum. Verifizieren Sie die Parallelogrammidentität

$$\| x + y \|^2 \ + \ \| x - y \|^2 = \ 2(\| x \|^2 \ + \ \| y \|^2) \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathcal{H} \quad .$$

Geben Sie im Spezialfall $\mathcal{H} = \mathbb{R}^2$ und $\| x \|^2 := x_1^2 + x_2^2$ eine geometrische Deutung.

b) Folgern Sie aus a), dass die Maximumnorm

$$\| f \|_\infty := \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

auf dem Raum $C([0, 1])$ nicht von einem Skalarprodukt abgeleitet werden kann.

c) Zeigen Sie: Für $1 \leq p \leq \infty$, $p \neq 2$, und $n \geq 2$ ist $(\mathbb{C}^n \ , \ \| \cdot \|_p)$ kein Hilbertraum.

Aufgaben G3: (ℓ^p- Räume)
Wir wollen zeigen, dass $(\ell^p(\mathbb{N}), \| \cdot \|_p)$ für $1 \leq p \leq \infty$ ein Banachraum ist.
Wir beginnen mit dem Fall: $1 \leq p < \infty$.

(a) Sei $(x^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset \ell^p(\mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge in $\ell^p(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass eine Folge $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existiert, so dass $\lim_{k \to \infty} x_n^{(k)} = y_n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Weisen Sie nach, dass $\|x^{(k)} - y\|_p$ gegen Null konvergiert für $k \to \infty$.

(Hinweis: Sei $\left(\sum_{n=0}^M |x_n^{(k)} - x_n^{(l)}|^p \right)^{1/p} < \epsilon$ für $M \in \mathbb{N}$. Was lässt sich dann über $\left(\sum_{n=0}^M |y_n - x_n^{(l)}|^p \right)^{1/p}$ sagen?)

(c) Zeigen Sie, dass $y \in \ell^p(\mathbb{N})$ ist.

(d) Weisen Sie nach, dass auch $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \| \cdot \|_\infty)$ ein Banachraum ist.

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (7 Punkte)
Es sei M eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für $0 < \alpha < 1$ sei $C^\alpha(M)$ die Menge aller auf M erklärten beschränkten und stetigen reellen Funktionen f mit

$$\| f \|'_\alpha := \sup_{\substack{x, y \in M \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\| x - y \|_2^\alpha} < \infty \quad .$$

a) Zeigen Sie, dass $C^\alpha(M)$ einen Banachraum mit der Norm

$$\| f \|_\alpha := \| f \|_0 \ + \ \| f \|'_\alpha \ , \ \| f \|_0 := \sup_{x \in M} |f(x)|$$

bildet.

b) Ist auch durch $\| f \|'_\alpha$ eine Norm auf $C^\alpha(M)$ erklärt?

c) Zeigen Sie, dass auch $\| f \|_0$ eine Norm auf $C^\alpha(M)$ ist. Ist $C^\alpha(M)$ vollständig bezüglich der Norm $\| f \|_0$?

d) Verifizieren Sie im Fall $n = 1$, $M =]0, 1[$ die Inklusion

$$C^\beta(M) \subsetneqq C^\alpha(M) \quad \text{für} \quad 0 \leq \alpha < \beta < 1 \quad .$$

Hierbei bedeutet $C^0(M) = C(M)$ die Menge der auf M beschränkten und stetigen Funktionen.

<u>Bemerkung:</u> $C^\alpha(M)$ wird als der Raum der auf M hölderstetigen Funktionen mit dem Hölder-Exponenten α bezeichnet; die Normen $\| f \|_\alpha$ heißen Hölder-Normen.