18. Oktober 2006

1. Übungsblatt

GRUPPENÜBUNGEN

Aufgabe G1: (ℓ^p-Räume)
Für $1 \le p \le \infty$ sei $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ der normierte Vektorraum

$$\ell^p := \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad \text{für} \quad 1 \le p < \infty \, ,$$

bzw.

$$\ell^\infty := \{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_\infty := \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N}\} < \infty \} \quad \text{für} \quad p = \infty \, .$$

(a) Zeigen Sie: Für $1 \le p < p' \le \infty$ ist ℓ^p eine echte Teilmenge von $\ell^{p'}$.

(b) Eine Folge heißt finit, wenn nur endlich viele Folgenglieder ungleich Null sind. Sei Φ der Vektorraum der finiten Folgen. Zeigen Sie, dass $\Phi \subset \ell^p$ für alle $p \ge 1$. Für welche $1 \le p \le \infty$ ist Φ dicht in $(\ell^p \, , \, \|\cdot\|_p)$?

Aufgaben G2:
Sei $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. Wir betrachten auf $\mathbb{C}^n$ die Normen

$$\| \, z \, \|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p \right)^{1/p} , \; 1 \le p < \infty \, , \quad \text{und} \quad \| \, z \, \|_\infty := \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, n\} \, .$$

Zeigen Sie: $\lim_{p\to\infty} \| \, z \, \|_p = \| \, z \, \|_\infty$ für alle $z \in \mathbb{C}^n$.

Aufgabe G3:
Sei $A : \mathcal{C}^\infty([0,1]) \to \mathcal{C}^\infty([0,1]) : f \mapsto f'$ der Ableitungsoperator.

(a) Berechne die Eigenwerte und Eigenfunktionen von A.

(b) Was ist $(e^{At} f)(x)$, wenn man e^{At} formal in eine Potenzreihe entwickelt? Welchen klassischen Satz aus der Analysis erkennen Sie? Warum ist das nicht befriedigend?

HAUSÜBUNGEN

Aufgabe H1: (Umgang mit Metriken) (4 Punkte)

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. ZeigenSie, dass der Raum (X, d_1) mit

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

ebenfalls ein metrischer Raum ist.

(b) Sei X ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und d eine beliebige Metrik auf X. Weisen Sie nach, dass auf X keine Norm $\|\cdot\|$ mit der Eigenschaft $\|x - y\| = d_1(x, y)$ für alle $x, y \in X$ existiert.

(c) Gegeben sei die Metrik $d_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $d_2(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Weiterhin sei auf $\mathbb{R}$ die Metrik $d_3(x, y) := |x - y|$ gegeben. Zeigen Sie, dass die identische Abbildung $id : (\mathbb{R}, d_2) \to (\mathbb{R}, d_3)$ zwar stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.
(Hinweis: Ist jede Cauchy-Folge bezüglich d_2 auch automatisch eine Cauchy-Folge bezüglich d_3?)