Einführung in die Optimierung, Übung 14, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 37 (A) Formulieren Sie die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + (x_2+1)^2 \\ \text{s.t.} & x_2 \geq e^{x_1}. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass $x_2^* = e^{x_1^*}$ und $-2 < x_1^* < 0$ gilt, falls x^* ein lokaler Minimalpunkt ist.

(B) Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) = -x_1 \\ \text{s.t.} & x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \\ & (x_1-1)^3 - x_2 \leq 0. \end{array}$$

Zeigen Sie, dass in $x^* = (1,0)$ die *Constraint Qualification* gilt, sowie dass x^* ein KKT-Punkt und eine globale Optimallösung ist.

(A) Die KKT-Bedingungen für das Problem lauten:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2+2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ e^{x_1} - x_2 &\leq 0, \\ u &\geq 0, \\ u(e^{x_1} - x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, dass entweder $u = 0$ oder $e^{x_1} - x_2 = 0$.
$\underline{u^* = 0}$: Daraus folgt $x_1^* = 0$ und $x_2^* = -1$, was aber der Ungleichung $e^{x_1} - x_2 \leq 0$ widerspricht. Daher erhält man in diesem Fall keine Lösung des Systems. Es muss also
$\underline{u^* > 0}$ gelten, woraus $e^{x_1^*} - x_2^* = 0$ folgt. Daher muss x_1^* die Gleichung

$$x_1^* = -(e^{x_1^*} + e^{2x_1^*})$$

erfüllen. Da $e^{x_1^*} + e^{2x_1^*} > 0$ gilt, folgt $x_1^* < 0$. Daraus schliesst man wiederum $e^{x_1^*} + e^{2x_1^*} < 2$ und daher $x_1^* > -2$.

(B) Sei $g_1(x) = x_1^2 + x_2^1 - 1$ und $g_2(x) = (x_1-1)^3 - x_2$. Beide Nebenbedingungen sind bindend für $x^* = (1,0)$. Die Gradienten im Punkt x^* sind $\nabla g_1(x^*) = \binom{2}{0}$ und $\nabla g_2(x^*) = \binom{0}{-1}$. Da die Vektoren linear unabhägig sind, gilt die LICQ-Regularitätsbedingung.

$\nabla f(x^*) = \binom{-1}{0}$. Damit x^* ein KKT-Punkt sein kann, muss

$$\nabla f(x^*) + a\nabla g_1(x^*) + b\nabla g_2(x^*) = 0$$

für $a, b \geq 0$ gelten. Die Lösung des Systems liefert $a = \frac{1}{2}$ und $b = 0$. Daher ist x^* ein KKT-Punkt.

Da $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$, gilt $|x_1| \leq 1$. Weiterhin $f(x) = -x_1 \leq -1 = f(x^*)$. Damit ist $x^* = (1,0)$ das globale Optimum.

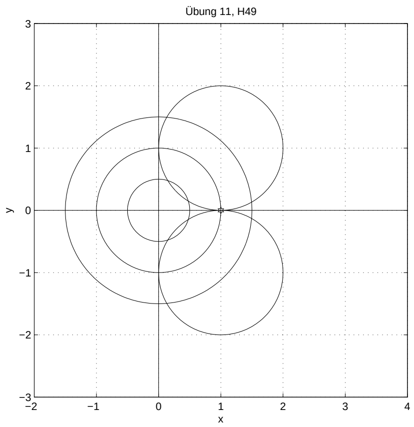
G 38 Betrachten Sie das quadratische Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \leq 1 \\ & (x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 \leq 1. \end{array}$$

(a) Skizzieren Sie die zulässige Menge und die Niveaulinien der Zielfunktion. Bestimmen Sie grafisch die Optimallösung x^*.

(b) Formulieren Sie die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen für das Problem. Gibt es Lagrange-Multiplikatoren λ_1^* und λ_2^*, die beweisen, dass x^* optimal ist?

(a) Aus der Grafik sieht man, dass die zulässige Menge nur aus dem Punkt $x^* = (1,0)$ besteht, der deshalb auch die Optimallösung ist.



(b) Die KKT-Bedingungen für das Problem lauten:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2\lambda_1(x_1-1) + 2\lambda_2(x_1-1) &= 0\\
2x_2 + 2\lambda_1(x_2-1) + 2\lambda_2(x_2+1) &= 0\\
(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 &\leq 1\\
(x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 &\leq 1\\
\lambda_1 &\geq 0\\
\lambda_2 &\geq 0\\
\lambda_1\Big((x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 - 1\Big) &= 0\\
\lambda_2\Big((x_1-1)^2 + (x_2+1)^2 - 1\Big) &= 0
\end{aligned}$$

Im Punkt $x^* = (1,0)$ reduziert sich dieses System auf

$$\lambda_1 \geq 0, \qquad \lambda_2 \geq 0, \qquad 2 = 0, \qquad -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0.$$

Dieses System hat offensichtlich keine Lösung, daher existieren für dieses Problem im Optimalpunkt keine Multiplikatoren.

G 39 Betrachten Sie das quadratische Problem

$$\begin{array}{llcccl}
\min & \frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2,\\
 & -x_1 & - & x_2 & \leq & -1,\\
 & -x_1 & & & \leq & 0,\\
 & & - & x_2 & \leq & 0.
\end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem mit der Strategie der aktiven Menge, wobei Sie als Startpunkt $x^0 = (1,1)$ verwenden. Skizzieren Sie die zulässige Menge und zeichnen Sie die Iterationspunkte x^k ein.

Wir haben $x^0 = (1,1)$ und $\mathcal{A}_0 = \{1\}$. Sei $u^0 = (0,0,0,0)$.

<u>Iteration 1:</u> Schritt 1: (x^0, u^0) ist kein KKT-Punkt, da

$$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{4} 0 \cdot \nabla g_i(x^0) \neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

Schritt 2: Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung ist $\Delta x^0 = (1, -1)$ *und* $u_1 = -2$.

Schritt 3: Fall (c), weil $x^0 + \Delta x^0 = (2, 0)$ *zulässig. Daher:*

$$x^1 := (2, 0), \qquad \mathcal{A}_1 := \{1\}.$$

<u>Iteration 2:</u> Schritt 1: (x^1, u^1) *ist kein KKT-Punkt, da* $u \not\geq 0$.

Schritt 2: Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung ist $\Delta x^1 = (0, 0)$ *und* $u_1 = -2$.

Schritt 3: Fall (b) mit $q = 1$. *Daher:*

$$x^2 := x^1 = (2, 0), \qquad \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}_1 \setminus \{1\} = \emptyset.$$

<u>Iteration 3:</u> Schritt 1: (x^2, u^2) *ist kein KKT-Punkt, da* $u \not\geq 0$.

Schritt 2: Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Lösung ist $\Delta x^2 = (-2, 0)$.

Schritt 3: Fall (d), weil $x^2 + \Delta x^2 = (0, 0)$ *unzulässig. Betrachte die Indizes* $\{i \notin \mathcal{A}_2 : a_i^T \Delta x^2 > 0\} = \{2, 3\}$. *Daher*

$$t_2 = \min\{\tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{2}\} = \tfrac{1}{2},$$

angenommen bei $r = 2$. *Somit:*

$$x^3 := x^2 + \tfrac{1}{2}\Delta x^2 = (1, 0), \qquad \mathcal{A}_3 := \mathcal{A}_2 \cup \{2\} = \{2\}.$$

<u>Iteration 4:</u>

Schritt 1: (x^3, u^3) *ist kein KKT-Punkt, da*

$$\nabla f(x^3) \neq 0.$$

Schritt 2: Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung ist $\Delta x^3 = (0, 0)$ *und* $u_2 = 1$.

Schritt 3: Fall (a) $\Longrightarrow$ *STOP.*

Der Punkt $x^* = (1, 0)$, $u^* = (0, 1, 0, 0)$ *ist ein KKT-Punkt des gegebenen Optimierungsproblems. Da das Problem konvex und regulär ist, ist* x^* *die Optimallösung.*

Wir bedanken uns für Ihr Interesse und wünschen erholsame Semesterferien!

Stefan Ulbrich Christian Brandenburg

Christine Schönberger Adrian Sichau Stephan Petsch