Einführung in die Optimierung, Übung 13, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 33 (A) Bestimmen Sie jeweils die Menge der zulässigen Richtungen in x^*:

(a) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \le 0, x_1 + x_2 \le 2\}$, $x^* = (1,1)$,

(b) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 3x_2^2 \le 1, x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \frac{1}{2} \le 0\}$, $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(B) Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \quad f(x)$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Überprüfen Sie jeweils, ob der Punkt x^*

(i) sicher kein lokaler Minimalpunkt ist,

(ii) eventuell ein lokaler Minimalpunkt sein könnte.

(a) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \ge 1\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,1)^T$.

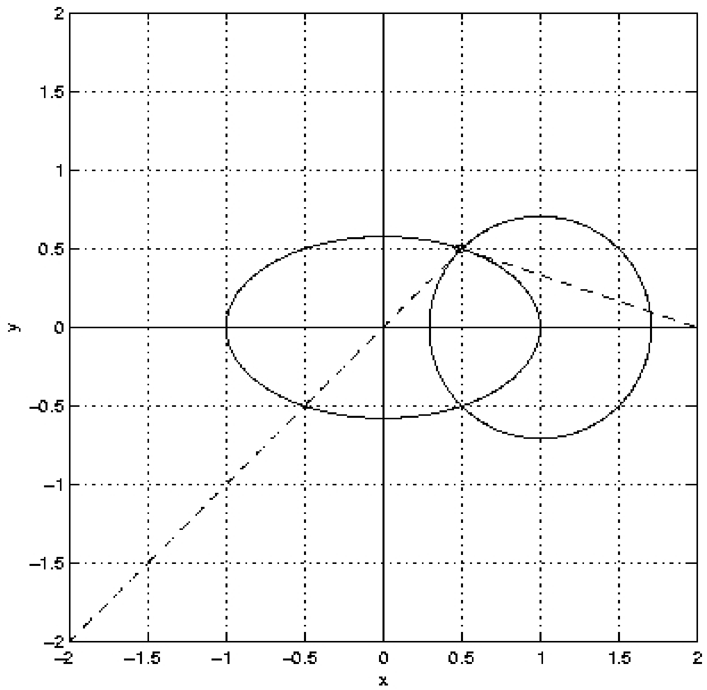
(b) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \ge 1, x_2 \ge 2\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,0)^T$.

(c) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (0,0)^T$.

(d) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \ge 1, x_2 \ge 2\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,0)^T$.

(A) *(a)* $\mathcal{Z}(x^*) = \{s \in \mathbb{R}^2 : s_1 - s_2 \le 0, s_1 + d_s \le 0\}$.

(b) $\mathcal{Z}(x^*) = \{s \in \mathbb{R}^2 : s_1 + 3s_2 < 0, -s_1 + s_2 < 0\}$.



(B) *(a)* $\mathcal{Z}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \ge 0\}$. *Die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung, nämlich* $d^T \nabla f(x^*) = d_1 + d_2 \ge 0$ *für alle* $d \in \mathcal{Z}(x^*)$, *ist nicht erfüllt, der Punkt* x^* *ist sicher kein lokaler Minimalpunkt.*

(b) $\mathcal{Z}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^2 : d_1 \ge 0, d_2 \ge 0\}$. *Die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung, nämlich* $d^T \nabla f(x^*) = d_1 \ge 0$ *für alle* $d \in \mathcal{Z}(x^*)$, *ist erfüllt, der Punkt* x^* *ist eventuell ein lokaler Minimalpunkt.*

(c) x^* *ist ein innerer Punkt. Die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung für einen inneren Punkt, nämlich* $\nabla f(x^*) = 0$ *ist erfüllt. Der Punkt* x^* *ist eventuell ein lokaler Minimalpunkt.*

(d) *wie (b). Die notwendige Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung ist jedoch verletzt,* x^* *ist kein lokaler Minimalpunkt.*

G 34 Betrachten Sie das quadratische Optimierugsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ mit

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^T Qx - b^T x.$$

(a) Schreiben Sie die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein lokales Minimum auf. Wann existiert ein stationärer Punkt (= ein Punkt, der diese Bedingungen erfüllt)?

(b) Unter welchen Bedingungen an Q besitzt f ein lokales Minimum?

(c) Unter welchen Bedingungen an Q besitzt f einen stationären Punkt, aber weder ein Minimum noch ein Maximum?

(a) Die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung lautet: $\nabla f(x) = 0$, hier also

$$Qx - b = 0.$$

Ein stationärer Punkt existiert genau dann, wenn das Gleichungssystem $Qx = b$ eine Lösung hat, also genau dann, wenn b Element des Bildes von Q ist (beispielsweise wenn Q invertierbar ist).

(b) Wenn Q positiv definit ist, dann besitzt f sicher ein lokales Minimum, vgl. die hinreichende Optimalitätsbedingung zweiter Ordnung.

(c) Wenn das System $Qx = b$ eine Lösung x^* hat, aber $\nabla^2 f(x^*)$ indefinit ist, dann besitzt f einen stationären Punkt, ist aber nach oben und unten unbeschränkt und besitzt daher weder ein Minimum noch ein Maximum.

G 35 Betrachten Sie das Problem

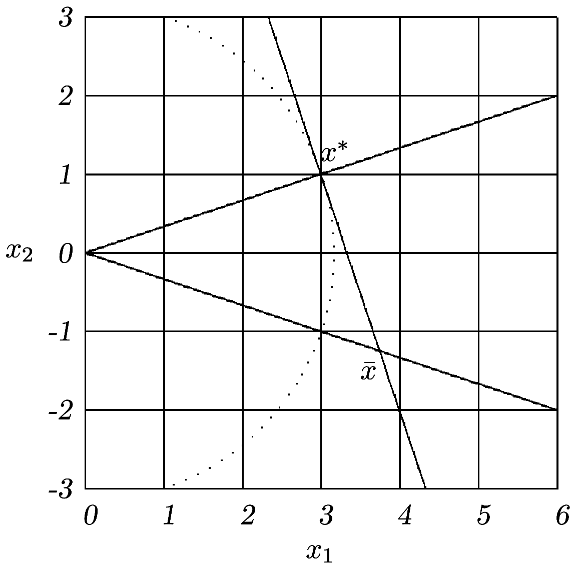
$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & -3x_1 - x_2 + 10 \le 0 \\ & -x_1 + 3x_2 \le 0 \\ & -x_1 - 3x_2 \le 0 \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem grafisch.

(a) Folgern Sie, dass ein lokaler Minimalpunkt x^* existiert und zeigen Sie, dass in der grafischen Lösung die KKT-Bedingungen erfüllt sind. Bestimmen sie dabei auch den zugehörigen Lagrange-Multiplikator u^*.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der KKT-Bedingungen, dass sich im zweiten Eckpunkt $\bar{x}$ des Polyeders $\mathcal{P}(A, b)$ kein Optimum befindet.

(a) Da die Höhenlinien der Zielfunktion konzentrische Kreise um den Ursprung bilden, wird das Minimum in dem Punkt $x^* \in \mathcal{X}$ angenommen, der in der Euklidischen Norm am ursprungsnächsten ist. Aus der Grafik erkennt man, dass dies der Punkt $x^* = (3, 1)^T$ ist.



Die KKT-Bedingungen des Optimierungsproblems lauten:

$$\nabla f(x^*) + A^T u^* = \begin{pmatrix} 2x_1^* \\ 2x_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} u^* = 0 \tag{1}$$

$$Ax^* = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x^* \leq \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b \tag{2}$$

$$u_i \left(Ax^* - b\right)_i = u_i \left(\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} x^* - b \right)_i = 0, \qquad u_i \geq 0, \qquad i = 1,2,3 \tag{3}$$

Für $x^* = (3,1)^T$ ist die Zulässigkeitsbedingung offensichtlich erfüllt und die Komplementaritätsbedingung gilt für $u_3^* = 0$, $u_1^*, u_2^* \geq 0$. Aus der Multiplikatorregel ergibt sich nun ein lineares Gleichungssystem für u_1 und u_2, das die eindeutige Lösung $u_1^* = 2$, $u_2^* = 0$ besitzt.
Somit erfüllt $x^* = (3,1)^T$ die KKT-Bedingungen mit Lagrange-Multiplikator $u^* = (2,0,0)^T$.

(b) *Der zweite Eckpunkt hat die Koordinaten $\bar{x}(\frac{15}{4}, \frac{5}{4})^T$. Die Zulässigkeitsbedingung ist offensichtlich erfüllt, aus den Komplementaritätsbedingungen folgt nun direkt $\bar{u}_2 = 0$. Dei Multiplikatorregel liefert diesmal ein lineares Gleichungssystem für u_1 und u_3, dessen eindeutige Lösung $\bar{u}_1 = 2$, $\bar{u}_3 = -\frac{3}{2}$ die Komplementaritätsbedingung verletzt. $\bar{x}$ kann also keine Optimallösung sein.*

G 36 Betrachten Sie folgendes Mehrzieloptimierungsproblem, d.h ein Optimierungsproblem mit zwei Zielfunktionen

$$(MZP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f_1(x) \\ \min & f_2(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \le 0 \quad (i = 1, \dots, m). \end{array}$$

Im Allgemeinen gibt es keinen zulässigen Punkt x^*, der beide Zielfunktionen gleichzeitig optimiert, man muss sich daher einen anderen Optimalitätsbegriff überlegen.

Man nennt einen zulässigen Punkt x^* effizient (auch: Pareto-optimal), wenn es keinen anderen zulässigen Punkt y gibt, so dass

$$f_i(y) \le f_i(x^*) \quad \text{für alle } i = 1, 2 \qquad \text{und} \qquad f_i(y) < f_i(x^*) \quad \text{für ein } i = 1, 2.$$

(a) Zeichnen Sie die Menge der effizienten Punkte für das Mehrzielproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \min & x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 4. \end{array}$$

(b) Nun betrachten wir eine gewichtete Summe der beiden Zielfunktionen, wobei $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$ die Gewichte seien. Zeigen Sie: Ist x^* (globaler) Minimalpunkt des Problems

$$(P_\alpha) \qquad \begin{array}{ll} \min & [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] \\ \text{s.t.} & g_i(x) \le 0 \quad (i = 1, \dots, m), \end{array}$$

dann ist x^* effizient für (MZP).

(a) Die zulässige Menge ist das Polytop mit den vier Ecken $(1, 4)$, $(2, 2)$, $(4, 1)$ und $(4, 4)$. Die effiziente Menge des Mehrzieloptimierungsproblems besteht aus den beiden Verbindungsstrecken zwischen den Punkten $(1, 4)$ und $(2, 2)$ sowie zwischen $(2, 2)$ und $(4, 1)$.

(b) Angenommen, die Lösung x^* von (P_α) wäre nicht effizient für (MZP). Dann gäbe es ein zulässiges y mit der Eigenschaft

$$f_i(y) \le f_i(x^*) \quad \textit{für alle } i = 1, 2 \qquad \textit{und} \qquad f_i(y) < f_i(x^*) \quad \textit{für ein } i = 1, 2.$$

Damit wäre jedoch (da $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$)

$$\alpha_1 f_1(y) + \alpha_2 f_2(y) < \alpha_1 f_1(x^*) + \alpha_2 f_2(x^*),$$

ein Widerspruch zur Optimalität von x^*.