Programmierübung, Lösungsvorschlag

Hausübung

H 30 (5 Punkte)

Zeigen Sie: (a) Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ gilt: $|r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1$.
(b) Für je zwei rationale Zahlen $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt: $\langle rs \rangle \leq \langle r \rangle + \langle s \rangle$.

(a) *Sei zunächst* $r \in \mathbb{Z}$. *Dann gilt:*

$$\langle r \rangle - 1 = \lceil \log_2(|r|+1) \rceil \geq \log_2(|r|+1)$$

und daher

$$2^{\langle r \rangle - 1} \geq |r| + 1.$$

Nun sei $r = \frac{p}{q}$ *mit* $p, q \in \mathbb{Z}$ *und* $q \geq 1$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \langle r \rangle - 1 &= \langle p \rangle + \langle q \rangle - 1 = \lceil \log_2(|p|+1) \rceil + 1 + \lceil \log_2(|q|+1) \rceil + 1 - 1 \\ &\geq \log_2 \Big((|p|+1)(|q|+1) \Big), \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} 2^{\langle r \rangle - 1} &\geq (|p|+1)(|q|+1) = |p||q| + |p| + |q| + 1 \\ &\geq |p||q| + 1 \geq \tfrac{|p|}{|q|} + 1 = |r| + 1. \end{aligned}$$

(b) *Seien zunächst* $r, s \in \mathbb{Z}$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \langle r \rangle + \langle s \rangle &= \lceil \log_2(|r|+1) \rceil + 1 + \lceil \log_2(|s|+1) \rceil + 1 \\ &\geq \lceil \log_2(|r|+1) + \log_2(|s|+1) \rceil + 2 = \lceil \log_2[(|r|+1)(|s|+1)] \rceil + 2 \\ &\geq \lceil \log_2(|rs|+1) \rceil + 1 = \langle rs \rangle \end{aligned}$$

Nun betrachten wir $r = \frac{p_1}{q_1}$ *und* $s = \frac{p_2}{q_2}$ *mit* $p_1, q_1, p_2, q_2 \in \mathbb{Z}$. *Dann ist* $rs = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$ *und es gilt:*

$$\begin{aligned} \langle rs \rangle &= \langle p_1 p_2 \rangle + \langle q_1 q_2 \rangle \leq \langle p_1 \rangle + \langle p_2 \rangle + \langle q_1 \rangle + \langle q_2 \rangle \\ &= \big(\langle p_1 \rangle + \langle q_1 \rangle \big) + \big(\langle p_2 \rangle + \langle q_2 \rangle \big) = \langle r \rangle + \langle s \rangle \end{aligned}$$

H 31 (5 Punkte)

(A) Betrachten Sie das Polyeder $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\}$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt die Ellipsoidmethode höchstens um zu entscheiden, ob $\{x \in \mathbb{R}^n : Cx < d\}$ leer ist oder $\mathcal{P}$ einen Punkt enthält?

(B) In der j-ten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_j = (0,0)^T$ und $A_j = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben. Sei $x + y \leq -1$ eine der verletzten Ungleichungen. Stellen Sie diese Situation graphisch dar. Bestimmen Sie a_{j+1} und A_{j+1} und stellen Sie das zugehörige Ellipsoid graphisch dar.

(A) *Die maximale Anzahl der Iterationen der Ellipsoidmethode ist* $N = 2n((3n+1)\langle C \rangle + (2n+1)\langle d \rangle - n^3)$. *In unserem Beispiel ist* $n = 2$ *und damit*

$$\langle C \rangle = \langle 3 \rangle + \langle -1 \rangle + \langle -6 \rangle + \langle 2 \rangle = 3 + 2 + 4 + 3 = 12$$

$$\langle d \rangle = \langle 4 \rangle + \langle -9 \rangle = 4 + 5 = 9.$$

Damit ergibt sich $N = 484$ *Iterationen als maximale Laufzeit der Ellipsoidmethode.*

(B) *Es gilt* $c = (1,1)^T$. *Wir berechnen zunächst den Hilfsvektor* d:

$$d = \frac{1}{\sqrt{c^T A_j c}} A_j c = \frac{1}{\sqrt{(1,1)\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

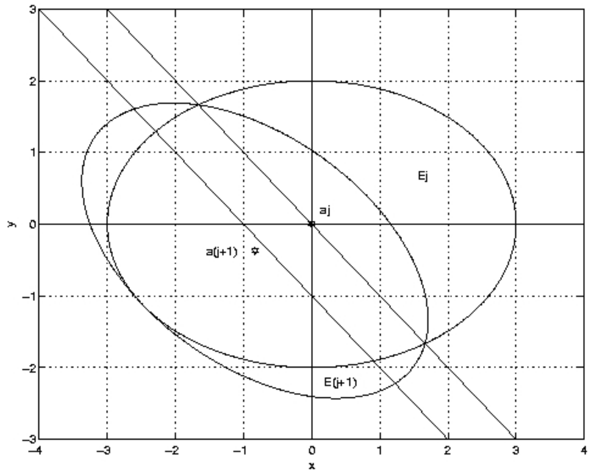
Laut Update-Formeln gilt damit:

$$a_{j+1} = a_j - \frac{1}{n+1} d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{13}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{13}} \end{pmatrix}$$

sowie

$$\begin{aligned}
A_{j+1} &= \frac{n^2}{n^2-1}\left(A_j - \frac{2}{n+1} d d^T\right) \\
&= \frac{2^2}{2^2-1}\left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{2+1}\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}(9,4)\right) \\
&= \frac{4}{3}\left(\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - \frac{2}{39}\begin{pmatrix} 81 & 36 \\ 36 & 16 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{4}{117}\begin{pmatrix} 189 & -72 \\ -72 & 124 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Graphisch sieht die Situation so aus:



H 32 (5 Punkte)

(A) Betrachten Sie folgendes Polytop in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rcrcr}
-x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\
3x_1 & & & \leq & 4 \\
-2x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3
\end{array}$$

Stellen Sie mit Hilfe der Ellipsoidmethode fest, ob das Polytop leer ist oder nicht. Verwenden Sie als Anfangsellipsoid einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 7. (Rechnen Sie bitte auf vier Nachkommastellen genau.)

(B) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass A durch die Definition

$$\langle x, y \rangle_A := x^T A y$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^n$ induziert. Mit $\|x\|_A := \sqrt{\langle x, x \rangle_A}$ ist dann eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Beweisen Sie für diese Norm die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle_A| \leq \|x\|_A \|y\|_A.$$

Welche Gestalt hat die Einheitskugel dieser Norm?

(A) (2 Punkte)

Wir starten mit $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(A_0, a_0)$ *mit*

$$a_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} 49 & 0 \\ 0 & 49 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 1:</u> a_0 *verletzt die Ungleichung* $-x_1 - x_2 \leq -2$, *daher* $c = (-1,-1)^T$. *Daher:*

$$d = \begin{pmatrix} -4.9497 \\ -4.9497 \end{pmatrix}, \qquad a_1 = \begin{pmatrix} 1.6499 \\ 1.6499 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 43.5555 & -21.7777 \\ -21.7777 & 43.5555 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 2:</u> a_1 *verletzt die Ungleichung* $3x_1 \leq 4$, *daher* $c = (3,0)^T$. *Daher:*

$$d = \begin{pmatrix} 6.5997 \\ -3.2998 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} -0.5499 \\ 2.7499 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 19.3580 & -9.6790 \\ -9.67907 & 48.3951 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 3:</u> a_2 *verletzt die Ungleichung* $-2x_1 + 2x_2 \leq 3$, *daher* $c = (-2,2)^T$. *Daher:*

$$d = \begin{pmatrix} -3.1111 \\ 6.2222 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 0.4871 \\ 0.6758 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 17.2071 & 4.3018 \\ 4.3018 & 30.1125 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 4:</u> a_3 *verletzt die Ungleichung* $-x_1 - x_2 \leq -2$, *daher* $c = (-1,-1)^T$. *Daher:*

$$d = \begin{pmatrix} -2.8762 \\ -4.6020 \end{pmatrix}, \qquad a_4 = \begin{pmatrix} 1.4458 \\ 2.2098 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 15.5894 & -6.0299 \\ -6.0299 & 21.3510 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 5:</u> a_4 *verletzt die Ungleichung* $3x_1 \leq 4$, *daher* $c = (3,0)^T$. *Daher:*

$$d = \begin{pmatrix} 3.9483 \\ -1.5272 \end{pmatrix}, \qquad a_5 = \begin{pmatrix} 0.1297 \\ 2.7188 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_5 = \begin{pmatrix} 6.9286 & -2.6799 \\ -2.6799 & 26.3603 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 6:</u> a_5 *verletzt die Ungleichung* $-2x_1 + 2x_2 \leq 3$, *daher* $c = (-2,2)^T$. *Daher:*

$$d = \begin{pmatrix} -1.5456 \\ 4.6712 \end{pmatrix}, \qquad a_6 = \begin{pmatrix} 0.6449 \\ 1.1618 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_6 = \begin{pmatrix} 7.1148 & 2.8443 \\ 2.8443 & 15.7511 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 7:</u> a_6 *verletzt die Ungleichung* $-x_1 - x_2 \leq -2$, *daher* $c = (-1,-1)^T$. *Daher:*

$$d = \begin{pmatrix} -1.8637 \\ -3.4799 \end{pmatrix}, \qquad a_7 = \begin{pmatrix} 1.2661 \\ 2.3170 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_7 = \begin{pmatrix} 6.39885 & -1.9726 \\ -1.9726 & 10.2372 \end{pmatrix}.$$

<u>Iteration 8:</u> a_7 *erfüllt alle Ungleichungen, STOP.*

Das Polytop ist nicht leer, der Punkt $a_7 = (1.2661, 2.3170)^T$ *liegt im Polytop.*

(B) (3 Punkte)

Seien $x, x_1, x_2, y \in \mathbb{R}^n$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

IP1: $\langle x_1 + x_2, y\rangle_A = (x_1 + x_2)^T Ay = x_1^T Ay + x_2^T Ay = \langle x_1, y\rangle_A + \langle x_2, y\rangle_A$.

IP2: $\langle \alpha x, y\rangle_A = (\alpha x)^T Ay = \alpha(x^T Ay) = \alpha\langle x, y\rangle_A$.

IP3: $\langle x, y\rangle_A = x^T Ay = y^T Ax = \langle y, x\rangle_A$.

IP4: $\langle x, x\rangle_A = x^T Ax \geq 0$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *und* $\langle x, x\rangle_A = 0 \iff x = 0$, *da* A *positiv definit ist.*

Damit erfüllt $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ *die Definition eines inneren Produktes.*

Zum Beweis der Ungleichung von Cauchy-Schwarz: Für $y = 0$ *gilt die Ungleichung, weil* $\langle x, 0\rangle_A = \langle x, 0 \cdot 0\rangle_A = 0 \cdot \langle x, 0\rangle_A = 0$. *Sei daher jetzt* $y \neq 0$. *Dann gilt für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y\rangle_A = \langle x, x\rangle_A + \alpha\langle y, x\rangle_A + \alpha\langle x, y\rangle_A + \alpha^2\langle y, y\rangle_A.$$

Mit

$$\alpha = -\frac{\langle x, y\rangle_A}{\langle y, y\rangle_A}$$

ergibt sich die gewünschte Aussage.

Die Einheitskugel der Norm $\|\cdot\|_A$ *ist die Menge*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_A \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Ax \leq 1\},$$

also ein Ellipsoid. Für den Spezialfall $A = I$ *erhalten wir übrigens die gewohnte 2-Norm.*