Einführung in die Optimierung, Übung 11, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 31 Eine Möbelfirma stellt Regale, Tische, Stühle und Betten her. Zur Herstellung eines Produktes sind 3, 2, 1 bzw. 2 Arbeitsstunden, 4, 3, 3 bzw. 4 Einheiten Holz und jeweils eine Einheit Metall erforderlich. Es stehen 225 Arbeitsstunden, 117 Einheiten Metall und 420 Einheiten Holz zur Verfügung. Der Gewinn des Herstellers beträgt 19 Euro pro Regal, 13 Euro pro Tisch, 12 Euro pro Stuhl und 17 Euro pro Bett. Zur Bestimmung eines optimalen Produktionsplans hat die OR-Abteilung folgendes LP aufgestellt:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 19x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & + & 17x_4 & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 225 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 420 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 117 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

und mittels des Simplex-Verfahrens gelöst. Optimallösung ist $\bar{x} = (39, 0, 48, 30)^T$ mit Zielfunktionswert 1827. Optimale Basis ist $B = (1, 3, 4)$, Nichtbasis entsprechend $N = (2, 5, 6, 7)$. Die Inverse der Basismatrix lautet:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Reoptimieren Sie den Produktionsplan $x = (39, 0, 48, 30)^T$ der Möbelfirma mit den Methoden der Sensitivitätsanalyse, falls jeweils eine der folgenden Änderungen berücksichtigt werden soll:

(a) Es sollen höchstens doppelt so viele Regale wie Tische hergestellt werden.

(b) Der Gewinn pro Stuhl steigt von 12 auf 14 Euro.

(c) Der zur Verfügung stehende Vorrat an Holz verringert sich von 420 auf 400 Einheiten.

(d) Es werden zusätzlich noch Schränke hergestellt, die mit einem Gewinn von 15 Euro verkauft werden können. Zur Herstellung eines Schrankes werden 1 Arbeitsstunde, 2 Einheiten Metall und 2 Einheiten Holz benötigt.

(e) Durch die Anschaffung neuer Maschinen verringert sich die zur Herstellung eines Tisches nötige Arbeitszeit auf 1 Stunde.

In Standardform lautet das LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcllll}
-\min & -19x_1 & - & 13x_2 & - & 12x_3 & - & 17x_4 & & & & & \\
s.t. & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & +x_5 & & & = & 225 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & & +x_6 & & = & 420 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & +x_7 & = & 117 \\
 & & & & & & & & & & x_1, \dots, x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) *Offensichtlich wird die Optimallösung $\bar{x}$ von der neuen Nebenbedingung $x_1 - 2x_2 \leq 0$ abgeschnitten. Wir führen die entsprechende Schlupfvariable ein:*

$$x_1 - 2x_2 + x_8 = 0, \qquad x_8 \geq 0$$

und erweitern die Basis um x_8: $B' = (1, 3, 4, 8)$. Die neue Basismatrix zur Basis B' und ihre Inverse lauten:

$$A_{B'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{B'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\bar{x}_1 = 39$ und $\bar{x}_2 = 0$, daher ist $\bar{x}_8 = -39$. Die Vorzeichenbeschränkung von $\bar{x}_8$ ist also verletzt, daher ist die Basis B' nicht primal zulässig.

Da $z_N = (1, 2, 3, 1)^T \geq 0$, ist B' ist aber dual zulässig, daher kann der duale Simplex gestartet werden. Die Optimallösung des modifizierten Problems lautet: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (26, 13, 35, 43)$, der Zielfunktionswert ist 1814.

(b) *Neue Zielfunktion:* $\tilde{c} = (-19, -13, -14, -17, 0, 0, 0)^T$, *wobei nur der Koeffizient von* x_3 *geändert wurde. Wir wissen, dass B primal zulässig bleibt. Wir überprüfen duale Zulässigkeit: Es gilt*

$$z_N = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-19, -14, -17) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \geq 0,$$

somit ist B auch dual zulässig und damit optimal.

(c) *Neue rechte Seite ist* $\tilde{b} = (225, 400, 117)^T$. *Wir wissen, dass B dual zulässig bleibt, jedoch ist B nicht mehr primal zulässig, da* $\tilde{x}_B = A_B^{-1}\tilde{b} = (59, 68, -10)^T \not\geq 0$. *Wir starten daher den dualen Simplex mit zulässiger Basis B und erhalten die Optimallösung* $x = (55, 0, 60, 0)$ *mit Zielfunktionswert* 1765.

(d) *Hinzufügen einer neuen Variablen:* x_8 *entspricht der Anzahl der produzierten Schränke mit Zielfunktionskoeffizient* $c_8 = -15$ *sowie* $A_{\cdot 8} = (1, 2, 2)^T$. *Die Basis B bleibt primal zulässig, jedoch ist B nicht mehr dual zulässig, da*

$$z_8 = -15 - (1, 2, 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -19 \\ -12 \\ -17 \end{pmatrix} = -5 < 0.$$

Wir starten den primalen Simplex mit zulässiger Basis B und erhalten als Optimallösung $(x_1, \ldots, x_8) = (15, 0, 0, 86, 0, 0, 0, 8)$ *mit Zielfunktionswert* 1867.

(e) *Die Spalte* $A_{\cdot 2}$ *ändert sich zu* $A_{\cdot 2} = (1, 3, 1)^T$. *B ist primal zulässig, aber wegen*

$$z_2 = -13 - (1, 3, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -19 \\ -12 \\ -17 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

nicht mehr dual zulässig. Der primale Simplex-Algorithmus muss gestartet werden. Die Lösung des modifizierten Problems lautet: $x = (39, 48, 0, 30)$ *mit dem Zielfunktionswert* 1875.

G 32 (A) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie das Ellipsoid $\mathcal{E}(A, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - a)^T A^{-1}(x - a) \leq 1\}$.

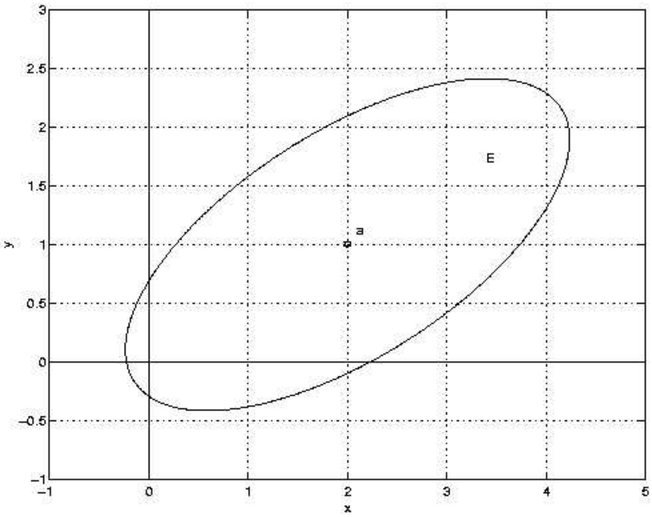
(B) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid

$$\mathcal{E}(A, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x - a)^T A^{-1}(x - a) \leq 1\}$$

das Bild der Einheitskugel $\mathcal{B} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 \leq 1\}$ unter der affinen Transformation $f(u) = A^{1/2}u + a$ ist. Damit ergibt sich als äquivalente Darstellung von $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(A, a) = \{a + A^{1/2}u : \|u\|_2 \leq 1\}.$$

(A) *Die Matrix A hat die Eigenwerte* 1 *und* 6, *die dazu gehörenden Eigenvektoren sind* $\binom{1}{-2}$ *und* $\binom{2}{1}$. *Das Ellipsoid hat also den Mittelpunkt a, die Achsenrichtungen entsprechen den Eigenvektoren, und die Längen der Achsen sind* 1 *bzw.* $\sqrt{6}$. *Graphisch:*



(B) Wir setzen $x = f(u) = A^{1/2}u + a$*, was gleichbedeutend ist mit*

$$u = A^{-1/2}(x - a).$$

Die Bedingung $\|u\|_2 \leq 1 \iff u^T u \leq 1$ *wird dann durch Einsetzen zu*

$$(x - a)^T \left(A^{-1/2}\right)^T A^{-1/2}(x - a) = (x - a)^T A^{-1}(x - a) \leq 1.$$

Hausübung

H 27 (5 Punkte)

(A) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und seien $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1. \end{array}$$

(B) Zeigen Sie, dass Ellipsoide konvexe Mengen sind.

(C) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Ellipsoids $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A,a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$ gilt:

$$\text{vol } \mathcal{E} = \sqrt{\det A} \cdot \text{vol } \mathcal{B},$$

wobei $\mathcal{B}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist.

(A) (3 Punkte)
Mit der Variablentransformation $y = A^{-1/2}(x-a) \iff x = A^{1/2}y + a$ haben wir das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & c^T A^{1/2} y + c^T a \\ s.t. & y^T y \leq 1. \end{array}$$

$c^T a$ ist eine Konstante und daher für die Optimallösung unerheblich. Definieren wir $\tilde{c}^T = c^T A^{1/2}$, so haben wir das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & \tilde{c}^T y \\ s.t. & y^T y \leq 1, \end{array}$$

d.h. wir minimieren hier eine lineare Funktion über dem Einheitskreis. Die Lösung dieses Problems ist $\bar{y} = -\frac{1}{\|\tilde{c}\|_2}\tilde{c}$. Durch Rücksubstitution erhält man die Lösung des ursprünglichen Problems:

$$\bar{y} = -\frac{1}{\|A^{1/2}c\|_2} A^{1/2} c \qquad \text{bzw.} \qquad \bar{x} = a - \frac{1}{\|A^{1/2}c\|_2} Ac,$$

der Zielfunktionswert ist $c^T\bar{x} = c^T a - \frac{1}{\|A^{1/2}c\|_2} c^T Ac = c^T a - \sqrt{c^T Ac}$.

(B) (1 Punkt)
Da jedes Ellipsoid als Bild der konvexen Einheitskugel unter einer affinen Transformation gesehen werden kann, genügt es zu zeigen, dass das Bild einer konvexen Menge $\mathcal{C}$ unter einer affinen Transformation $f(x) = Cx + d$ wieder konvex ist.

Dies sieht man aber sofort daran, dass mit $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ die Verbindungsstrecke $[x_1, x_2] \subset \mathcal{C}$ auf $[f(x_1), f(x_2)] \subset f(\mathcal{C})$ abgebildet wird.

(C) (1 Punkt)
Das Ellipsoid $\mathcal{E}$ ist das Bild der Einheitskugel $\mathcal{B}$ unter der affinen Transformation $f(u) = A^{1/2}u + a$. Die Jacobimatrix dieser Transformation ist $J_f = A^{1/2}$; sie hat die (konstante) Jacobideterminante $\det J_f = \det A^{1/2} = \sqrt{\det A}$. Nach dem Transformationssatz für Integrale gilt daher:

$$\text{vol } \mathcal{E} = \sqrt{\det A} \cdot \text{vol } \mathcal{B}.$$

H 28 (5 Punkte)

Um eine zulässige Startbasis für das lineare Programm

$$(LP1) \qquad \begin{array}{lrl} \min & c^T x & \\ & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ zu bestimmen, betrachten wir an Stelle der Phase I des Simplex-Algorithmus das lineare Programm aus H19:

$$(LP2) \qquad \begin{array}{lrcl} \min & -z & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & zb \\ & z & \leq & 1 \\ & x, z & \geq & 0 \end{array}$$

Wie kann man mittels einer optimalen Basis von (LP2) eine zulässige Basis für (LP1) bestimmen oder entscheiden, dass (LP1) unzlässig ist? Entwickeln Sie ein Verfahren und beweisen Sie dessen Korrektheit. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die folgenden linearen Programme an:

$$\begin{array}{lrcrl} \min & -x_1 & - & x_2 & \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq -6 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{lrcrl} \min & -x_1 & - & x_2 & \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq 0 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Zur Erinnerung: (LP2) besitzt stets eine Optimallösung z_opt mit optimalem Zielfunktionswert 0 oder -1, insbesondere gilt also $z_{opt} = 0$ oder $z_{opt} = 1$.

Hinweis: Bringen Sie (LP1) und (LP2) zunächst in Standardform und identifizieren Sie die Schlupfvariablen geeignet.

In Standardform lauten die Probleme

$$\begin{array}{lrcl} \min & c^T x & & \\ s.t. & Ax + (y_1, \dots, y_m)^T & = & b \\ & x, y & \geq & 0 \end{array} \tag{LP1}$$

und

$$\begin{array}{lrcl} \min & -z & & \\ s.t. & Ax - bz + (y_1, \dots, y_m)^T & = & 0 \\ & z + y_{m+1} & = & 1 \\ & x, z, y & \geq & 0 \end{array} \tag{LP2}$$

(LP1) ist genau dann zulässig, wenn (LP2) den Optimalwert -1 besitzt. (Begründung?)

Sei also (LP1) zulässig. Dann muss z in der Optimalbasis B' von (LP2) sein, insbesondere ist dann y_{m+1} nicht in B'. Die zu B' gehörende Matrix hat daher die folgende Form:

$$\begin{pmatrix} A_{B_1} & I_{B_2} & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} := D_{B'}$$

mit $|B_1| + |B_2| = m$, wobei A_{B_1} die Spalten von A und I_{B_2} die Spalten der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sind. Ferner gilt

$$D_{B'} \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und $(x_{B_1}, y_{B_2}, z)^T \geq 0$, $z = 1$. Wir zeigen nun, dass $B_1 \cup B_2$ eine primal zulässige Basis für (LP1) liefert. Da die Matrix (A_{B_1}, I_{B_2}) eine Untermatrix von $D_{B'}$ ist, ist sie ebenfalls regulär. Es gilt $|B_1| + |B_2| = m$ und

$$A_{B_1} x_{B_1} + I_{B_2} y_{B_2} - b \cdot 1 = 0.$$

Damit

$$(A_{B_1}, I_{B_2}) \begin{pmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_2} \end{pmatrix} = b,$$

mit $x_{B_1}, y_{B_2} \geq 0$, *was zu beweisen war.*

Dieses Verfahren wenden wir nun auf die beiden linearen Programme an. Für das erste gilt:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
-1 = \min -z & & & & & & & & \\
& 2x_1 & -x_2 & +z & +x_3 & & & = & 0 \\
& -x_1 & +2x_2 & +6z & & +x_4 & & = & 0 \\
& & & z & & & +x_5 & = & 1 \\
& & & & & & x, z & \geq & 0
\end{array}$$

mit optimaler Basis $B' = (1,2,3)$, $(x_1, x_2, z)^T = (\frac{4}{3}, \frac{11}{3}, 1)^T$. *Nach obigen Verfahren ist* $B = (1,2)$ *das primal zulässige Basis mit* $x_B = (\frac{4}{3}, \frac{11}{3})^T$.

Für das zweite LP ist

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
0 = \min -z & & & & & & & & \\
& 2x_1 & -x_2 & +z & +x_3 & & & = & 0 \\
& -x_1 & +2x_2 & & & +x_4 & & = & 0 \\
& & & z & & & +x_5 & = & 1 \\
& & & & & & x, z & \geq & 0
\end{array}$$

also ist dieses LP unzulässig.

H 29 (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Netzwerk bestehend aus n Knoten. Zwischen je zwei Knoten sollen gerichtete Kanten (in beide Richtungen) vorhanden sein. Die Variable x_{ij} beschreibt den Fluss von Knoten i zum Knoten j, die Kosten für diesen Fluss betragen $c_{ij}x_{ij}$, wobei c_{ij} gegebene Konstanten sind. Für den Fluss x_{ij} gibt es eine obere Schranke u_{ij} und eine untere Schranke $\ell_{ij} \geq 0$.

Den Zufluss in Knoten i bezeichnen wir mit b_i. $b_i > 0$ bedeutet, dass ein externer Fluss bei Knoten i in das Netz fließt, $b_i < 0$ bedeutet, dass ein Fluss der Größe $|b_i|$ bei Knoten i aus dem Netz fließt. Wir nehmen an, dass $\sum_{i=1}^{n} b_i = 0$. In jedem Knoten soll außerdem die Flusserhaltung gelten: Die Summe der Flüsse in Knoten i hinein ist gleich der Summe der Flüsse aus Knoten i heraus.

Man möchte nun die Gesamtkosten des Flusses durch das Netz unter den beschriebenen Nebenbedingungen minimieren. Formulieren Sie dies als lineares Optimierungsproblem.

Das LP lautet:

$$\begin{array}{ll}
\min & \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\
s.t. & b_i + \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ji} - \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = 0 \qquad i = 1, \ldots, n \\
& \ell_{ij} \leq x_{ij} \leq u_{ij}.
\end{array}$$