Einführung in die Optimierung, Übung 10, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 29 Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeigen Sie zunächst, dass die Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\
 & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0.
\end{array}$$

Mit den Schlupfvariablen lautet das Problem:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcrcrcr}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & + & x_5 & & & & & = & 14 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & & & + & x_6 & & & = & -25 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & & & & & + & x_7 & = & 14 \\
 & & & & & & & & & & & & \multicolumn{2}{r}{x_1, \ldots, x_7} & \geq & 0
\end{array}$$

$B = (5,6,7)$ *mit* $N = (1,2,3,4)$ *ist dual zulässig, da* $\bar{z}_N = (3,3,6,5) \geq 0$.

Iteration 1:

BTRAN: $\bar{x}_B = (14, -25, 14)^T$.

Pricing: $i = 2$, $B_i = 6$, *d.h.* $\bar{x}_6$ *verlässt die Basis.*

FTRAN: $\omega = (0,1,0)^T$, $\alpha_N = (2,1,5,-3)^T$.

Ratio-Test: $\gamma = \min\{\frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{6}{5}\} = \frac{6}{5}$; $j = 3$, *d.h.* $\bar{x}_3$ *betritt die Basis.*

Update: $\bar{z}_N = (3/5, 9/5, 0, 43/5)^T$; $\bar{z}_6 = \frac{6}{5}$; $B = (5,3,7)$, $N = (1,2,6,4)$.

Iteration 2:

BTRAN: $\bar{x}_B = (-6, 5, 4)^T$.

Pricing: $i = 1$, $B_i = 5$, *d.h.* $\bar{x}_5$ *verlässt die Basis.*

FTRAN: $\omega = (1, 4/5, 0)^T$, $\alpha_N = (3/5, -6/5, -4/5, 18/5)^T$.

Ratio-Test: $\gamma = \min\{\frac{3/5}{3/5}, \frac{43/5}{18/5}\} = 1$; $j = 1$, *d.h.* $\bar{x}_1$ *betritt die Basis.*

Update: $\bar{z}_N = (0,3,2,5)^T$; $\bar{z}_5 = 1$; $B = (1,3,7)$, $N = (5,2,6,4)$.

Iteration 3:

BTRAN: $\bar{x}_B = (10, 1, 2)^T$.

Pricing: $\bar{x}_B \geq 0$, *STOP.*

Somit ist $(10,0,1,0,0,0,2)$ *die Optimallösung.*

G 30 Seien $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang und H eine zulässige Basis von

$$\begin{array}{lrcrcr}
\max & b^T y & & & & \\
\text{s.t.} & A^T y & + & Iz & = & c \\
 & & & z & \geq & 0
\end{array}$$

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: *Entweder ist dieses LP unbeschränkt oder es existiert eine optimale Basis* H_{opt} *mit* $\{1, \ldots, m\} \subseteq H_{opt}$.

Hinweis: Betrachten Sie das lineare Problem in der Form

$$\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & b^T y^+ & - & b^T y^- & & & & \\
\text{s.t.} & A^T y^+ & - & A^T y^- & + & Iz & = & c \\
 & & & & \multicolumn{3}{r}{y^+, y^-, z} & \geq 0
\end{array}$$

Nehmen Sie an, dass y_1^+ und y_1^- nicht in der zulässigen Basis H sind. Betrachten Sie die reduzierten Kosten von y_1^+ bzw. y_1^-. Zeigen Sie anhand der Schritte FTRAN und Ratio-Test des Simplex-Algorithmus, dass das Problem unbeschränkt ist oder dass y_1^+ bzw. y_1^- gegen ein z_i mit $i \in H$ ausgetauscht werden kann. Teilen Sie dazu γ im Ratio-Test in γ_1, γ_2 auf, wobei γ_1 das Minimum über y_i mit $i \in H$ und γ_2 entsprechend das Minimum über z_i mit $i \in H$ ist. Zeigen Sie, dass Sie immer ein z_i als Austauschvariable für y_1^+ bzw. y_1^- wählen können.

Betrachte das LP in Standardform:

$$\begin{array}{lccccccc} \max & b^T y^+ & - & b^T y^- & & & & \\ s.t. & A^T y^+ & - & A^T y^- & + & Iz & = & c \\ & & & & & y^+, y^-, z & \geq & 0 \end{array}$$

Zur Abkürzung sei $D = (A^T, -A^T, I)$, $\tilde{b} = (b, -b, 0)$ *und* $u^T = (y^+, y^-, z)^T$.

Betrachten wir eine Basis $H \subset \{1, \dots, m, m+1, \dots, 2m, 2m+1, \dots, 2m+n\}$ *mit* $|H| = n$, *und sei* $N = \{1, \dots, 2m+n\} \setminus H$.

Offensichtlich kann nicht gleichzeitig $i \in H$ *und* $m + i \in H$ *gelten für ein* $i \in \{1, \dots, m\}$, *da ja die entsprechenden Spalten von* D_H *linear unabhängig sein müssen. Es gilt aber* $D_{\cdot i} = A^T_{\cdot i}$ *und* $D_{\cdot m+i} = -A^T_{\cdot i}$, *und diese Spalten sind linear abhängig.*

Angenommen, es gibt ein $i \in \{1, \dots, m\}$ *mit* $i \notin H$ *und* $m + i \notin H$. *O.B.d.A. sei* $i = 1$, *d.h.* $\underline{1 \notin H \text{ und } m + 1 \notin H}$, *d.h. weder* y_1^+ *noch* y_1^- *sind Basisvariable. Wie gewohnt kann*

$$Du = D_H u_H + D_N u_N = c$$

umgeschrieben werden als

$$u_H = D_H^{-1} c - D_H^{-1} D_N u_N, \qquad u_N = 0.$$

Sei $\tilde{N} := N \setminus \{1, m+1\}$. *Dann lassen sich die reduzierten Kosten von* y_1^+ *bzw.* y_1^- *aus der Zerlegung der Zielfunktion ablesen:*

$$\begin{aligned} \tilde{b}^T u &= \tilde{b}_H^T u_H + \tilde{b}_N^T u_N \\ &= \tilde{b}_H^T D_H^{-1} c + (\tilde{b}_N^T - \tilde{b}_H^T D_H^{-1} D_N) u_N \\ &= \tilde{b}_H^T D_H^{-1} c + (\tilde{b}_{\tilde{N}}^T - \tilde{b}_H^T D_H^{-1} D_{\tilde{N}}) u_{\tilde{N}} + \underbrace{(b_1 - \tilde{b}_H^T D_H^{-1} A_{1\cdot})^T}_{\varphi} y_1^+ + \underbrace{(-b_1 + \tilde{b}_H^T D_H^{-1} A_{1\cdot})^T}_{-\varphi} y_1^- \end{aligned}$$

Es gilt $\varphi \geq 0$ *oder* $-\varphi \geq 0$, *d.h.* y_1^+ *oder* y_1^- *kann beim Pricing als eintretende Variable gewählt werden. O.B.d.A. sei* y_1^+ *gewählt.*

Die Basismatrix D_H *besteht aus Spalten von* A^T *bzw.* $-A^T$ *(wobei eine Spalte von* A^T *entweder mit positivem Vorzeichen oder mit negativem Vorzeichen auftritt, nicht beides), sowie gewissen Spalten der* $n \times n$*-Identitätsmatrix. Bezeichnen wir die Indizes von* H, *die zu den Spalten von* $\pm A^T$ *gehören, mit* H'. *Es gilt* $|H'| < |H|$, *da weder* $A^T_{1\cdot}$ *noch* $-A^T_{1\cdot}$ *in der Basis sind. Die Spalten der Einheitsmatrix, die in* D_H *vorkommen, bezeichnen wir mit* $I_{H \setminus H'}$. *Also hat* D_H *die Form*

$$D_H = (\pm A^T_{H'} \;\; I_{H \setminus H'}).$$

u_H *ist die Lösung des Gleichungssystems*

$$(\pm A^T_{H'} \;\; I_{H \setminus H'}) \begin{pmatrix} \pm y_{H'} \\ z_{H \setminus H'} \end{pmatrix} = c,$$

und w *in FTRAN ist die Lösung von*

$$(\pm A^T_{H'} \;\; I_{H \setminus H'}) \cdot w = A^T_{1\cdot}.$$

Offensichtlich ist $w_i \neq 0$ für mindestens ein $i \in H \setminus H'$, da sonst $A_{1\cdot}^T$ linear abhängig von $\pm A_{H'}^T$ wäre. Betrachte

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \min\left\{ \frac{y_{H_i}^{+/-}}{w_i} : w_i > 0, i \in H' \right\}, \\
\gamma_2 &= \min\left\{ \frac{(z_{H \setminus H'})_i}{w_i} : w_i > 0, i \in H \setminus H' \right\}.
\end{aligned}$$

1. Fall, $\gamma_2 \leq \gamma_1$: Tausche $(z_{H\setminus H'})_i$ gegen y_1^+.

2. Fall, $\gamma_2 > \gamma_1$ und $\gamma_2 < \infty$: Tausche $(z_{H\setminus H'})_i$ gegen y_1^+. Beachte, dass manche $y_l^{+/-}$ in der Basis negativ werden können. Tausche diese gegen ihr Gegenstück, also falls $y_l^+ < 0$, setze $H = H \setminus \{l\} \cup \{m+l\}$, bzw. falls $y_l^- < 0$, setze $H = H \setminus \{m+l\} \cup \{l\}$. Damit bleibt H Basis und die zugehörige Basislösung erfüllt die Nichtnegativitätsbedingung.

3. Fall, $\gamma_2 = \infty > \gamma_1$ und $\varphi < 0$: Das LP ist unbeschränkt, d.h. $\mathcal{P}^=(A,b) = \emptyset$.

4. Fall, $\gamma_2 = \infty > \gamma_1$ und $\varphi = 0$: D.h. $w_i \leq 0$ für $i = |H'|+1, \ldots, |H|$ und $w_i < 0$ für mindestens einen Index $i \in \{|H'|+1, \ldots, |H|\}$. Da $\varphi = 0$ ist, können wir im Pricing auch y_1^- anstatt y_1^+ wählen. Dadurch dreht sich das Vorzeichen von w in FTRAN um, d.h. aus w wird $-w$, und wir können Fall 1 oder Fall 2 anwenden.

In allen vier Fällen folgt, dass das Problem entweder unbeschränkt ist (d.h. $\mathcal{P}^=(A,b) = \emptyset$), oder wir können $y_1^{+/-}$ gegen eine Schlupfvariable tauschen. Iteratives Vorgehen liefert schliesslich die Behauptung.

Hausübung

H 24 (5 Punkte)

(A) Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeigen Sie zunächst, dass die Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{llllllllll}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

(B) Formulieren Sie als LP:

$$\begin{array}{lrcl}
\min & \max\{x_1, x_4\} & & \\
\text{s.t.} & |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| & \leq & 10 \\
 & \max\{x_1, x_2\} & \leq & \min\{x_3, x_4\} \\
 & \dfrac{x_2 - x_4}{x_1 + x_3 + 1} & \leq & 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

(A) (3 Punkte) Mit den Schlupfvariablen lautet das Problem:

$$\begin{array}{llllllllllllll}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & & & & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & + & x_5 & & & = & 14 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & & & + & x_6 & = & -25 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & & & & + \; x_7 & = & 14 \\
 & & & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_7 & \geq & 0
\end{array}$$

$B = (5, 6, 7)$ mit $N = (1, 2, 3, 4)$ ist dual zulässig, da $\bar{z}_N = (3, 3, 6, 5) \geq 0$.

<u>Iteration 1:</u>

BTRAN: $\bar{x}_B = (14, -25, 14)^T$.

Pricing: $i = 2$, $B_i = 6$, *d.h.* $\bar{x}_6$ *verlässt die Basis.*

FTRAN: $\omega = (0, 1, 0)^T$, $\alpha_N = (2, 1, 5, -3)^T$.

Ratio-Test: $\gamma = \min\{\frac{3}{2}, \frac{3}{1}, \frac{6}{5}\} = \frac{6}{5}$; $j = 3$, *d.h.* $\bar{x}_3$ *betritt die Basis.*

Update: $\bar{z}_N = (3/5, 9/5, 0, 43/5)^T$; $\bar{z}_6 = \frac{6}{5}$; $B = (5, 3, 7)$, $N = (1, 2, 6, 4)$.

<u>Iteration 2:</u>

BTRAN: $\bar{x}_B = (-6, 5, 4)^T$.

Pricing: $i = 1$, $B_i = 5$, *d.h.* $\bar{x}_5$ *verlässt die Basis.*

FTRAN: $\omega = (1, 4/5, 0)^T$, $\alpha_N = (3/5, -6/5, -4/5, 18/5)^T$.

Ratio-Test: $\gamma = \min\{\frac{3/5}{3/5}, \frac{43/5}{18/5}\} = 1$; $j = 1$, *d.h.* $\bar{x}_1$ *betritt die Basis.*

Update: $\bar{z}_N = (0, 3, 2, 5)^T$; $\bar{z}_5 = 1$; $B = (1, 3, 7)$, $N = (5, 2, 6, 4)$.

<u>Iteration 3:</u>

BTRAN: $\bar{x}_B = (10, 1, 2)^T$.

Pricing: $\bar{x}_B \geq 0$, *STOP.*

Somit ist $(10, 0, 1, 0, 0, 0, 2)$ *die Optimallösung.*

(B) (2 Punkte) Für die Zielfunktion benötigen wir eine neue Variable $t \in \mathbb{R}$. Dann lautet die Zielfunktion $\min t$. Neue Nebenbedingungen sind

$$x_1 \leq t, \quad x_4 \leq t.$$

Die Nebenbedingung $|x_1 + x_2 + x_3 + x_4| \leq 10$ *lässt sich schreiben als*

$$-10 \leq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10.$$

Die Nebenbedingung $\max\{x_1, x_2\} \leq \min\{x_3, x_4\}$ *lässt sich schreiben als vier lineare Nebenbedingungen*

$$x_1 \leq x_3, \quad x_1 \leq x_4, \quad x_2 \leq x_3, \quad x_2 \leq x_4.$$

Schliesslich kann man die fraktionale Nebenbedingung (da der Nenner sicher positiv ist) schreiben als

$$x_2 - x_4 \leq 4(x_1 + x_3 + 1) \quad \Longleftrightarrow \quad -4x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq 4.$$

H 25 (5 Punkte)

Gegeben seien zwei Punktemengen $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \ldots, v^K\}$ und $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \ldots, w^L\}$ in $\mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine Hyperebene, die $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ trennt, d.h. gesucht sind $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass

$$a^T v^i \leq \alpha \quad \text{für } i = 1, \ldots, K \qquad \text{und} \qquad a^T w^j \geq \alpha \quad \text{für } j = 1, \ldots, L.$$

Die triviale Lösung $a = 0$, $\alpha = 0$ soll ausgeschlossen sein. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Zulässigkeitsproblem, also als ein LP mit beliebiger Zielfunktion. Setzen Sie voraus, dass die affine Hülle der $K + L$ Punkte Dimension n hat, d.h. es gilt

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & \ldots & v^K & w^1 & w^2 & \ldots & w^L \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = n + 1.$$

Zur Rangbedingung:

Wenn die affine Hülle der $K + L$ *Punkte Dimension* n *hat, dann gibt es keine "echte" Hyperebene* $b^T x = \beta$*, in der die Punkte liegen. Das bedeutet, die einzige Hyperebene, in der alle Punkte enthalten sind, ist*

$$0^T x = 0.$$

Anders gesagt, der einzige Vektor $(b, -\beta)^T$*, für den*

$$\begin{pmatrix} v^1 & v^2 & \ldots & v^K & w^1 & w^2 & \ldots & w^L \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ -\beta \end{pmatrix} = 0$$

gilt, ist $(b, -\beta)^T = (0, 0)^T$*. Der Kern dieser Matrix hat also Dimension Null, daher muss ihr Rang* $n + 1$ *sein.*

Gäbe es eine Hyperebene $b^T x = \beta$*, in der alle Punkte liegen, dann wäre diese Hyperebene eine Lösung des Ungleichungssystems*

$$a^T v^i \leq \alpha \quad \text{für } i = 1, \ldots, K \qquad \text{und} \qquad a^T w^j \geq \alpha \quad \text{für } j = 1, \ldots, L.$$

würde jedoch die Punktemengen nicht trennen.

Um die trennende Hyperebene zu finden, schreiben wir nun die $K + L$ *Bedingungen*

$$\begin{array}{rcll} a^T v^i & \leq & \alpha & \quad (i = 1, \ldots, K) \\ a^T w^j & \geq & \alpha & \quad (j = 1, \ldots, L) \end{array}$$

an die Variablen a, α *mit der Definition*

$$B = \begin{pmatrix} -(v^1)^T & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -(v^K)^T & 1 \\ (w^1)^T & -1 \\ \vdots & \vdots \\ (w^L)^T & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(K+L)\times(n+1)}, \qquad x = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)}$$

als $Bx \geq 0$. Wir suchen Lösungen $x \neq 0$ dieses Systems. Die Rangannahme impliziert $\operatorname{rang}(B) = n+1$. *Daher besteht der Kern von B nur aus dem Nullvektor, und aus $x \neq 0$ folgt $Bx \neq 0$. Wir brauchen also noch eine Bedingung, die $Bx \neq 0$ erzwingt. Dies kann zum Beispiel dadurch erreicht werden, dass man $\mathbb{1}^T Bx = 1$ verlangt. Daher findet man das gesuchte a, α durch Lösen des Zulässigkeitsproblems*

$$Bx \geq 0, \qquad \mathbb{1}^T Bx = 1.$$

Man kann das Zulässigkeitsproblem mit einer beliebigen Zielfunktion versehen und mit dem Simplex-Algorithmus lösen. Beachten Sie, dass das System unzulässig sein kann. Dies würde der Situation entsprechen, dass die Mengen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ nicht trennbar sind. Unter Umständen hat das Zulässigkeitsproblem mehrere Lösungen. Dies bedeutet, dass die trennende Hyperebene nicht eindeutig sein muss.

H 26 (5 Punkte)

Was ist an der folgenden Argumentation falsch? Geben Sie für jede Abschätzung an, ob und warum sie richtig oder falsch ist.

Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{aligned}
\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (1)\\
&\leq \max\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (2)\\
&\leq \min\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (3)\\
&\leq \max\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (4)\\
&\leq \min\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (5)\\
&\leq \max\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (6)\\
&\leq \min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (7)\\
&\leq \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (8)
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere zwischen den letzten beiden Zeilen, und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.

Betrachten wir ein Beispiel:

$$\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
s.t. & x_1 + x_2 \leq 1 \\
 & x_1, x_2 \geq 0,
\end{array}$$

d.h. $c = \binom{1}{1}$, $A = (1,1)$ *und* $b = 1$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
&\max\{x_1 + x_2 : x_1 + x_2 \leq 1, x \geq 0\} = 1 \\
&\leq \min\{y : y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, y \geq 0\} = 1 && (9)\\
&\leq \max\{y : y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, y \geq 0\} = +\infty && (10)\\
&\leq \min\{x_1 + x_2 : x_1 + x_2 \geq 1, x \leq 0\} = \min\{x_1 + x_2 : x \in \emptyset\} = +\infty && (11)\\
&\not\leq \max\{x_1 + x_2 : x_1 + x_2 \geq 1, x \leq 0\} = \max\{x_1 + x_2 : x \in \emptyset\} = -\infty && (12)
\end{aligned}$$

Sobald eine der zulässigen Mengen leer wird, gilt die Abschätzung

$$\min\{f(x) : x \in \mathcal{P}\} \leq \max\{f(x) : x \in \mathcal{P}\}$$

nicht mehr, da

$$\min\{f(x) : x \in \emptyset\} = +\infty \not\leq -\infty = \max\{f(x) : x \in \emptyset\}.$$

Die Ungleichungen (1), (3), (5) und (7) sind einfache Anwendungen des schwachen Dualitätssatzes.

Es gibt aber auch Fälle, wo alle Abschätzungen richtig sind, zum Beispiel

$$\begin{array}{llcrcl} \max & x_1 & + & x_2 & & \\ s.t. & x_1 & & & \leq & 0 \\ & & & x_2 & \leq & 0 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0, \end{array}$$

also $c = \binom{1}{1}$, $A = I$ *und* $b = \binom{0}{0}$. *Hier besteht die zulässige Menge nur aus dem Punkt* $x = (0,0)^T$, *daher ist in diesem Fall die Lösung des Maximierungsproblems tatsächlich gleich der Lösung des Minimierungsproblems.*

Die Ungleichungskette lautet hier:

$$\begin{aligned} &\max\{x_1 + x_2 : x \leq 0, x \geq 0\} = 0 \\ &\leq \quad \min\{0y_1 + 0y_2 : (y_1, y_2) \geq (1,1), y \geq 0\} = 0 && (1) \\ &\leq \quad \max\{0y_1 + 0y_2 : (y_1, y_2) \geq (1,1), y \geq 0\} = 0 && (2) \\ &\leq \quad \min\{x_1 + x_2 : x \geq 0, x \leq 0\} = 0 && (3) \\ &\leq \quad \max\{x_1 + x_2 : x \geq 0, x \leq 0\} = 0 && (4) \\ &\leq \quad \min\{0y_1 + 0y_2 : (y_1, y_2) \leq (1,1), y \leq 0\} = 0 && (5) \\ &\leq \quad \max\{0y_1 + 0y_2 : (y_1, y_2) \leq (1,1), y \leq 0\} = 0 && (6) \\ &\leq \quad \min\{x_1 + x_2 : x \leq 0, x \geq 0\} = 0 && (7) \\ &\leq \quad \max\{x_1 + x_2 : x \leq 0, x \geq 0\} = 0 && (8) \end{aligned}$$