Einführung in die Optimierung, Übung 7, Lösungsvorschlag

Die Abgabe von Hausübung H15 ist auf nächste Woche verlängert!

Gruppenübung

G 20 Gegeben sei das LP

$$\begin{array}{lrcrcl}
\min & -x_1 & - & x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & x_2 & \leq & 2 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) Wandeln Sie das Problem in Standardform um, bestimmen Sie alle Basislösungen und berechnen Sie für die zulässigen Basislösungen den dazugehörigen Zielfunktionswert.

(b) Ist dieses LP lösbar? Falls ja, geben Sie die Optimallösung an.

(a) Das LP lautet in Standardform:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & -x_1 & - & x_2 & & & & & & \\
s.t. & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\
 & -2x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
 & & & & & & x_1, x_2, x_3, & x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

Betrachten jetzt alle möglichen Basen:

$$B_1 = (1,2) \quad A_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{B_1}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad x_{B_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \textit{nicht zulässig}$$

$$B_2 = (1,3) \quad A_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{B_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad x_{B_2} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}, \quad \textit{nicht zulässig}$$

$$B_3 = (1,4) \quad A_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{B_3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{B_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \textit{zulässige Basislösung, ZF} = -2$$

$$B_4 = (2,3) \quad A_{B_4} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{B_4}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{B_4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \textit{zulässige Basislösung, ZF} = -1$$

$$B_5 = (2,4) \quad A_{B_5} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{B_5}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_{B_5} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \textit{nicht zulässig}$$

$$B_6 = (3,4) \quad A_{B_6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{B_6}^{-1} = A_{B_6}, \quad x_{B_6} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \textit{zulässige Basislösung, ZF} = 0$$

(b) Das duale LP lautet:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & 2y_1 & + & y_2 & & \\
s.t. & y_1 & - & 2y_2 & \leq & -1 \\
 & -y_1 & + & y_2 & \leq & -1 \\
 & & & y_1, y_2 & \leq & 0
\end{array}$$

oder äquivalent (ersetzen von y durch $-y$):

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & -2y_1 & - & y_2 & & \\
s.t. & y_1 & - & 2y_2 & \geq & 1 \\
 & -y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
 & & & y_1, y_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Durch Addition der beiden Ungleichungsnebenbedingungen erhält man die gültige Ungleichung $-y_2 \geq 2$, was der Vorzeichenbeschränkung $y_2 \geq 0$ widerspricht. Daher ist die zulässige Menge des dualen Problems leer. Da wir wissen, dass es primal zulässige Punkte gibt, folgt daraus, dass das primale LP unbeschränkt ist.

G 21 Seien $P = P(A, b)$ ein Polyeder und $F = \{x \in P \mid c^T x = \gamma\}$ eine nicht-leere Seitenfläche von P. Dann gilt:

$$\text{eq}(F) = \{i \in M \mid \exists u \geq 0, u_i > 0 : u^T A = c^T, u^T b = \gamma\}.$$

Lösungshinweis: Betrachten Sie das lineare Programm $\max\{c^T x \mid Ax \leq b\}$. Dann ist F die Menge der Optimallösungen von LP. Verwenden Sie die Sätze vom komplementären Schlupf.

Wegen $\max\{c^T x : Ax \leq b\} = -\min\{-c^T x : Ax \leq b\}$ *betrachten wir das (LP)*

$$\begin{array}{ll} \min & -c^T x \\ s.t. & Ax \leq b \end{array}$$

Dann ist F die Menge der Optimallösungen von (LP). Das duale lineare Programm zu (LP) lautet:

$$\text{(DLP)} \qquad \begin{array}{ll} \max & -u^T b \\ s.t. & u^T A = c^T \\ & u \geq 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist $F \neq \emptyset$ *und nach dem starken Dualitätssatz haben (LP) und (DLP) optimale Lösungen mit dem gleichen Zielfunktionswert* γ.

"$\subseteq$*": Sei* $i \in \text{eq}(F)$. *Aufgrund des Satzes vom starken komplementaren Schlupf existieren Optimallösungen* $\bar{x}$, $\bar{u}$ *von (LP) bzw. (DLP) mit* $\bar{u}_j > 0 \Leftrightarrow A_{j\cdot}\bar{x} = b_j$. *Da* $\bar{x}$ *eine Optimallösung von (LP) ist, gilt* $\bar{x} \in F$, *somit auch* $A_{i\cdot}\bar{x} = b_i$. *Für eine Optimallösung* $\bar{u}$ *von (DLP) gilt*

$$\bar{u}^T A = c^T, \quad \bar{u}^T b = \gamma, \quad \bar{u} \geq 0 \quad \text{und} \quad \bar{u}_i > 0.$$

"$\supseteq$*": Setze* $D := \{i \in M \mid \exists u \geq 0, u_i > 0 : u^T A = c^T, u^T b = \gamma\}$. *Sei* $i \in D$, *d.h.* $\exists u \geq 0$, $u_i > 0$ *mit* $u^T A = c^T$ *und* $u^T b = \gamma$. *Dann ist u optimal für (DLP). Aus dem Satz vom schwachen komplementaren Schlupf folgt* $A_{i\cdot}x = b_i$ *für jede Optimallösung x von (LP). D.h.* $A_{i\cdot}x = b_i$ *für alle* $x \in F$ *und somit* $i \in \text{eq}(F)$.

G 22 Gegeben sei das Hängegerüst wie in Abb. 1. Die Kabel 1 und 2 können je 300kg Last, die Kabel 3 und 4 je 100kg und die Kabel 5 und 6 jeweils 50kg Last tragen. Unter Vernachlässigung des Gewichts der Kabel und der Bohlen soll das maximal zulässige Gesamtgewicht $y_1 + y_2 + y_3$ für die Lasten gefunden werden.

(a) Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm.

(b) Stellen Sie das dazugehörige duale lineare Programm auf und diskutieren Sie seine Bedeutung.

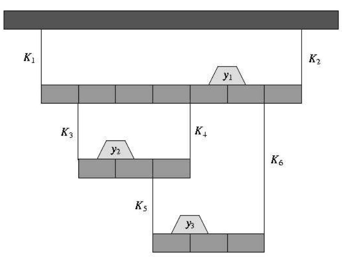

Abbildung 1: Zu G21.

Die Last verteilt sich jeweils linear auf die beiden Kabel im Verhältnis zum Abstand der Last zum Kabel. Von unten beginnend:

Kabel 6: $\frac{1}{3}y_3 \leq 50$

Kabel 5: $\frac{2}{3}y_3 \leq 50$

Kabel 4: $\frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}y_3) \leq 100$

Kabel 3: $\frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}y_3) \leq 100$

Kabel 2: $\frac{1}{7}(\frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}y_3)) + \frac{4}{7}(\frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}y_3)) + \frac{5}{7}y_1 + \frac{6}{7}(\frac{1}{3}y_3) \leq 300$

Kabel 1: $\frac{6}{7}(\frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}y_3)) + \frac{3}{7}(\frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}(\frac{2}{3}y_3)) + \frac{2}{7}y_1 + \frac{1}{7}(\frac{1}{3}y_3) \leq 300$

Damit erhalten wir folgendes LP:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\max & y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & \\
\text{s.t.} & \frac{2}{7}y_1 & + & \frac{5}{7}y_2 & + & \frac{3}{7}y_3 & \leq & 300 \\
 & \frac{5}{7}y_1 & + & \frac{2}{7}y_2 & + & \frac{4}{7}y_3 & \leq & 300 \\
 & & & \frac{2}{3}y_2 & + & \frac{2}{9}y_3 & \leq & 100 \\
 & & & \frac{1}{3}y_2 & + & \frac{4}{9}y_3 & \leq & 100 \\
 & & & & & \frac{2}{3}y_3 & \leq & 50 \\
 & & & & & \frac{1}{3}y_3 & \leq & 50 \\
 & & & & & y_1,\, y_2,\, y_3 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Das duale dazu:

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\min & 300k_1 & + & 300k_2 & + & 100k_3 & + & 100k_4 & + & 50k_5 & + & 50k_6 & & \\
\text{s.t.} & \frac{2}{7}k_1 & + & \frac{5}{7}k_2 & & & & & & & & & \geq & 1 \\
 & \frac{5}{7}k_1 & + & \frac{2}{7}k_2 & + & \frac{2}{3}k_3 & + & \frac{1}{3}k_4 & & & & & \geq & 1 \\
 & \frac{3}{7}k_1 & + & \frac{4}{7}k_2 & + & \frac{2}{9}k_3 & + & \frac{4}{9}k_4 & + & \frac{2}{3}k_5 & + & \frac{1}{3}k_6 & \geq & 1 \\
 & & & & & & & & & \multicolumn{3}{r}{k_1,\, k_2,\, k_3,\, k_4,\, k_5,\, k_6} & \geq & 0.
\end{array}
$$

Anhand des dualen LP können wir leicht entscheiden, welche Seile verstärkt werden müssten, um mehr Last zu tragen (dieses sind Seile i mit $\bar{k}_i > 0$ in einer Optimallösung $\bar{k}$), bzw. welche Kabel durch weniger starke ersetzt werden könnten, aber das Gerüst trotzdem noch die gleiche Last trägt (dieses sind Kabel i mit $\bar{k}_i = 0$ in einer Optimallösung $\bar{k}$).

Hausübung

H 16 (5 Punkte)

Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Zeigen Sie: *Besitzt das obige LP eine nicht-degenerierte optimale Basislösung, so besitzt das dazu duale LP eine eindeutige Optimallösung.*

Sei $\bar{x}_B$ die nicht degenerierte optimale Basislösung und $B \subseteq \{1, \ldots, n\}$ die zugehörige Basis mit $\bar{x}_B = A_B^{-1} b > 0$. Da $\bar{x}$ nicht degeneriert ist, ist diese Basis eindeutig bestimmt.

Da (P) eine Optimallösung besitzt, hat auch (D) eine solche. Sei nun $\bar{y}$ irgendeine Optimallösung des dualen LPs.

Da für alle $i \in B$ gilt $\bar{x}_i > 0$, folgt aus dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf:

$$\bar{y}^T A_{\cdot i} = c_i \quad \forall\, i \in B.$$

In Matrixschreibweise: $\bar{y}^T A_B = c_B^T$ bzw. $A_B^T \bar{y} = c_B$. Da A_B regulär ist, ist $\bar{y} = A_B^{-T} c_B$ eindeutig bestimmt.

H 17 (5 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$(P) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcrcl} \max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & x_1, \ldots, x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

(a) Formulieren Sie das duale Problem zu (P).

(b) Prüfen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung von (P) ist.

(a) Das duale Problem zu (P) lautet:

$$(D) \quad \begin{array}{lrcrcrcrcl} \min & 4u_1 & + & 3u_2 & + & 5u_3 & + & u_4 & & \\ \text{s.t.} & u_1 & + & 4u_2 & + & 2u_3 & + & 3u_4 & \geq & 7 \\ & 3u_1 & + & 2u_2 & + & 4u_3 & + & u_4 & \geq & 6 \\ & 5u_1 & - & 2u_2 & + & 4u_3 & + & 2u_4 & \geq & 5 \\ & -2u_1 & + & u_2 & - & 2u_3 & - & u_4 & \geq & -2 \\ & 2u_1 & + & u_2 & + & 5u_3 & - & 2u_4 & \geq & 3 \\ & & & & & & & u_1, \ldots, u_4 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) In $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ sind die erste, zweite und vierte Nebenbedingung von (P) aktiv, die dritte Ungleichung ist inaktiv. Wenn $\bar{x}$ optimal für (P) ist, gilt laut Satz vom schwachen komplementären Schlupf für eine Optimallösung $\bar{u}$ von (D): $\bar{u}_3 = 0$.

Da $\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4 > 0$, müssen in (D) die zweite, dritte und vierte Ungleichung aktiv sein. Zusammen mit $\bar{u}_3 = 0$ ergibt dies das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3u_1 + 2u_2 + u_4 &= 6 \\ 5u_1 - 2u_2 + 2u_4 &= 5 \\ -2u_1 + u_2 - u_4 &= -2 \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung hiervon ist $u_1 = u_2 = u_4 = 1$. *Die so errechnete Lösung* $(u_1, \ldots, u_4) = (1, 1, 0, 1)$ *ist jedoch für (D) nicht zulässig, da sie die fünfte Ungleichung von (D) nicht erfüllt. Daher kann auch* $\bar{x}$ *nicht optimal für (P) sein.*