Einführung in die Optimierung, Übung 6, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 17 Beweisen Sie die nachstehende Folgerung aus dem Farkas-Lemma:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$Ax \le b \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcl} y^T A & = & 0 \\ y & \ge & 0 \\ y^T b & < & 0. \end{array}$$

Sei $A' = [A, -A, I]$. Dann hat $Ax \le b$ genau dann eine Lösung, wenn $A'(x^+, x^-, s)^T = b$, $x^+, x^-, s \ge 0$ eine Lösung hat (vgl. die Transformationen 3.6).

Nach dem Farkas-Lemma hat entweder dieses System eine Lösung oder das System $y^T[A, -A, I] \ge 0$, $y^T b < 0$, welches äquivalent ist zu $y^T A = 0$, $y \ge 0$, $y^T b < 0$.

G 18 Gegeben sei das lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{rll} \min & x_1 - x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \le 5 \\ & x_2 + 2x_3 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \ge 0. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie das dazugehörige duale lineare Programm (DLP).

(b) Stellen Sie die Bedingung des komplementären Schlupfes für die Programme auf und benutzen Sie diese, um (LP) und (DLP) zu lösen.

(a) Das Problem lautet in natürlicher Form

$$\begin{array}{lll} & \mathit{min} & x_1 - x_3 \\ \text{(LP)} & \mathit{s.t.} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Das dazu duale Problem ist gegeben durch

$$\begin{array}{lll} \mathit{max} & -(5y_1 + 6y_2 - 6y_3) & \\ \mathit{s.t.} & y_1 - y_4 & = -1 \\ & 2y_1 + y_2 - y_3 - y_5 & = 0 \\ & 2y_2 - 2y_3 - y_6 & = 1 \\ & y_1, \dots, y_6 & \ge 0. \end{array}$$

(b) Nach dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf gilt

$$y_i = 0 \quad \mathit{oder} \quad b_i - A_{i\cdot}x = 0$$

Aufgrund der Gleichung $y_1 - y_4 = -1$ kann $y_4 = 0$ nicht gelten, also folgt $x_1 = 0$.
Die zweite und dritte Ungleichung in (LP) ergeben $x_3 = 3 - \frac{x_2}{2}$. Zusammen mit der ersten und fünften Ungleichung lässt sich (LP) also reduzieren auf

$$\begin{array}{ll} \mathit{min} & -3 + \frac{x_2}{2} \\ \mathit{s.t.} & 0 \le x_2 \le \frac{5}{2} \end{array}$$

was für $x_2 = 0$ minimal wird. Es folgt also $x = (0, 0, 3)^T$.

Aus $x_3 > 0$ wiederum folgt mit dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf $y_6 = 0$, sowie aus $x_1 + 2x_2 < 5$, $y_1 = 0$, woraus sofort $y_4 = 1$ folgt. Das verbleibende Gleichungssystem zum bestimmen der restlichen y_i ist unterbestimmt, eine mögliche optimale Lösung ist $y = (0, \frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, 0)^T$.

G 19 In praktischen Anwendungen sind Problemdaten oft nicht exakt bekannt, sondern nur mit einer gewissen Fehlertoleranz. Betrachten wir dies am Beispiel der Nebenbedingungsmatrix A eines linearen Problems: Für die Komponenten von A seien obere und untere Schranken bekannt, d.h. es sind B und V gegeben so dass

$$A \in \mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{m \times n} : B_{ij} - V_{ij} \leq A_{ij} \leq B_{ij} + V_{ij} \text{ für alle } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n\}.$$

Dann hat man folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \text{ für alle } A \in \mathcal{A}. \end{array}$$

Formulieren Sie dies als LP.

Das Problem ist äquivalent zu

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \textit{s.t.} & Bx + V|x| \leq b \end{array}$$

Damit lautet das LP:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \textit{s.t.} & Bx + Vy \leq b \\ & -y \leq x \leq y \end{array}$$

Hausübung

H 13 (5 Punkte)

Beweisen Sie die nachstehende Folgerung aus dem Farkas-Lemma, unter Ausnutzung geeigneter Resultate.

Für dimensionsverträgliche Matrizen A, B, C und D sowie Vektoren a, b, u und v hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array} \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcrcl} u^T A & + & v^T C & \geq & 0 \\ u^T B & + & v^T D & = & 0 \\ u & & & \geq & 0 \\ u^T a & + & v^T b & < & 0. \end{array}$$

Das linke System ist äquivalent zu $A'z \leq b'$ mit

$$A' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \\ -C & -D \\ -I & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Folgerung 4.7 hat entweder dieses System eine Lösung, oder das System

$$y'^T A' = 0, \quad y' \geq 0, \quad y'^T b' < 0$$

hat eine Lösung. Mit $y' = (u, v^+, v^-, w)$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} u^T A & + & (v^+)^T C & - & (v^-)^T C & - & w & = & 0 \\ u^T B & + & (v^+)^T D & - & (v^-)^T D & & & = & 0 \\ u^T a & + & (v^+)^T b & - & (v^-)^T b & & & < & 0 \\ & & & & & & u, v^+, v^-, w & \geq & 0. \end{array}$$

Interpretieren wir nun w als Schlupfvariable und setzen $v = v^+ - v^-$, so ist dieses System wiederum äquivalent zu

$$\begin{array}{rcrcl} u^T A & + & v^T C & \geq & 0 \\ u^T B & + & v^T D & = & 0 \\ u & & & \geq & 0 \\ u^T a & + & v^T b & < & 0. \end{array}$$

H 14 (5 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des folgenden LPs:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -3x_1 & - & 2x_2 & \leq & -4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Betrachten Sie das LP

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \end{array}$$

und untersuchen Sie, welche Lösungsfälle auftreten können.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine dimensionsverträgliche Matix. Sei und $c \in \mathbb{R}^m$. Beweisen Sie: *Entweder existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = c$ oder es existiert ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^T y = 0, c^T y = 1$.*

Hinweis: Verwenden Sie das in Aufgabe H 13 gezeigte Resultat.

(a) (1 Punkt)

Zunächst besitzt das Problem zulässige Punkte, z.B. $(1,1)^T$. *Betrachten der Nebenbedingungen zeigt außerdem, dass die zulässige Menge sowohl beschränkt und abgeschlossen, insbesondere also kompakt, und konvex ist. Mit Korollar 2.40 folgt nun sofort die Existenz einer Optimallösung.*

(b) (2 Punkte)

Bei dem angegebenen LP können folgende Fälle eintreten:

(1) Das LP ist unzulässig.
(2) Das LP ist zulässig und unbeschränkt.
(3) Das LP ist zulässig und die Zielfunktion ist konstant auf $\{x : Ax = b\}$.

(c) (2 Punkte)

Die Folgerung in H 13 liefert: entweder $Ax = c$ *hat eine Lösung* $x \in \mathbb{R}^n$ *oder* $\tilde{y}^T A = 0$, $\tilde{y}^T c < 0$ *hat eine Lösung* $\tilde{y} \in R^m$. *Sei* $y_0 = \tilde{y}^T c$. *Da* $\tilde{y}^T c < 0$ *gilt, ist* $y_0 \neq 0$. *Setze nun* $y := \frac{1}{y_0}\tilde{y}$, *so ist* $A^T y = 0$ *und* $y^T c = \frac{1}{y_0}\tilde{y}^T c = 1$ *das gesuchte* y.

H 15 (5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Paar primaler und dualer Probleme (P) und (D):

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array} \qquad \text{und} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y = -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Zeigen Sie: *Hat (D) eine endliche Optimallösung, so ist die zulässige Menge von (P) nicht leer.*

Angenommen, (D) hat eine endliche Optimallösung y^*, *und (P) sei unzulässig. Die Unzulässigkeit von* $Ax \leq b$ *impliziert nach Folgerung 4.7, dass das System*

$$\begin{array}{rcl} A^T y & = & 0 \\ y & \geq & 0 \\ b^T y & < & 0 \end{array}$$

eine Lösung $\bar{y}$ *hat. Damit ist* $y^* + \lambda\bar{y}$ *für alle* $\lambda > 0$ *zulässig für (D), denn* $y^* + \lambda\bar{y} \geq 0$ *und*

$$A^T(y^* + \lambda\bar{y}) = \underbrace{A^T y^*}_{=-c} + \lambda \underbrace{A^T \bar{y}}_{=0} = -c.$$

Aber es gilt:

$$-b^T(y^* + \lambda\bar{y}) = -b^T y^* - \underbrace{\lambda}_{>0} \underbrace{b^T \bar{y}}_{<0} > -b^T y^*,$$

im Widerspruch zur Optimalität von y^*.