Einführung in die Optimierung, Übung 5, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 14 Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$
(P)\qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & 7x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & & & & & & & & & x_1,\dots,x_5 & \geq & 0
\end{array}
$$

Formulieren Sie das duale Problem zu (P).

Hinweis: Bringen Sie (P) zunächst in natürliche Form.

(P) lautet in natürlicher Form

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrcr}
\min & 7x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
s.t. & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
 & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
 & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
 & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
 & -x_1 & & & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & & -x_2 & & & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & & -x_3 & & & & & \leq & 0 \\
 & & & & & & & -x_4 & & & \leq & 0 \\
 & & & & & & & & & -x_5 & \leq & 0
\end{array}
$$

Das zugehörige duale Problem ist gegeben durch

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcrrrrrcr}
\max & -4u_1 & - & 3u_2 & - & 5u_3 & - & u_4 & & & & & & & & \\
s.t. & u_1 & + & 4u_2 & + & 2u_3 & + & 3u_4 & - & u_5 & & & & & = & -7 \\
 & 3u_1 & + & 2u_2 & + & 4u_3 & + & u_4 & & & -\ u_6 & & & & = & 6 \\
 & 5u_1 & - & 2u_2 & + & 4u_3 & + & 2u_4 & & & & -\ u_7 & & & = & -5 \\
 & -2u_1 & + & u_2 & - & 2u_3 & - & u_4 & & & & & -\ u_8 & & = & 2 \\
 & 2u_1 & + & u_2 & + & 5u_3 & - & 2u_4 & & & & & & -\ u_9 & = & -3 \\
 & & & & & & & & & & & & & u_1,\dots,u_9 & \geq & 0
\end{array}
$$

Elimination der Schlupfvariablen $u_5,\dots,u_9$ liefert das duale Problem zu (P):

$$
(D)\qquad
\begin{array}{lrcrcrcrcr}
\max & -4u_1 & - & 3u_2 & - & 5u_3 & - & u_4 & & \\
s.t. & u_1 & + & 4u_2 & + & 2u_3 & + & 3u_4 & \geq & -7 \\
 & 3u_1 & + & 2u_2 & + & 4u_3 & + & u_4 & \geq & 6 \\
 & 5u_1 & - & 2u_2 & + & 4u_3 & + & 2u_4 & \geq & -5 \\
 & -2u_1 & + & u_2 & - & 2u_3 & - & u_4 & \geq & 2 \\
 & 2u_1 & + & u_2 & + & 5u_3 & - & 2u_4 & \geq & -3 \\
 & & & & & & & u_1,\dots,u_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

G 15 In der Vorlesung wurde gezeigt (Satz 4.3):

Das zu

$$\min c^T x \quad s.t. \quad Ax \geq b,\ x \geq 0 \tag{P}$$

duale Problem kann geschrieben werden in der Form

$$\max b^T y \quad s.t. \quad A^T y \leq c,\ y \geq 0. \tag{D}$$

Zeigen Sie: Das zu (D) duale Problem ist (P).

Hinweis: Wandeln Sie zunächst (D) in ein äquivalentes Minimierungsproblem um.

Lösen von (D) ist äquivalent zum Lösen des Minimierungsproblems

$$\min -b^T y \quad s.t. \quad -A^T y \geq -c,\ y \geq 0. \tag{D'}$$

Das zu (D') duale Problem lautet nach Satz 4.3

$$\max -c^T z \quad s.t. \quad -Az \leq -b,\ z \geq 0, \tag{D''}$$

was nach Substitution $x = z$ äquivalent zu (P) ist:

$$\min c^T x \quad s.t. \quad Ax \geq b,\ x \geq 0. \tag{P}$$

G 16 Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch die Produktionskapazitäten der drei Hersteller werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

Hersteller A	höchstens 2000 Liter zu 35 EUR je Liter,
Hersteller B	höchstens 2500 Liter zu je 25 EUR,
Hersteller C	höchstens 1200 Liter zu je 10 EUR.

Daraus stellt er drei Verschnitte *Sir Roses*, *Highland Wind* und *Old Regent* her, die er zu 34 EUR, 28,50 EUR bzw. 22,50 EUR pro Liter verkauft. Die Zusammensetzung der Verschnitte ist:

Sir Roses	wenigstens 60% von A,
	höchstens 20% von C,
Highland Wind	wenigstens 15% von A,
	höchstens 60% von C,
Old Regent	höchstens 50% von C.

Wie sollten die Mischungen aussehen und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

(a) Modellieren Sie dieses Problem als LP.

(b) Stellen Sie das dazugehörige duale LP auf. Wie kann die Lösung interpretiert werden?

(c) Was muss an dem Modell aus (a) geändert werden, wenn man berücksichtigt, dass der Whisky nur flaschenweise verkauft wird (eine Flasche = 0.7 Liter).

(a) Wir verwenden die Variablen $x_{ij} \geq 0$, um die Anzahl Liter Whisky von Hersteller $i \in \{A, B, C\}$ im Verschnitt $j \in \{S, H, O\}$ zu bezeichnen. Der Gewinn, d.h. die Differenz von Verkaufspreis minus Einkaufskosten, ist zu maximieren:

$$\begin{aligned}
&34(x_{AS} + x_{BS} + x_{CS}) + 28.5(x_{AH} + x_{BH} + x_{CH}) + 22.5(x_{AO} + x_{BO} + x_{CO}) \\
&- 35(x_{AS} + x_{AH} + x_{AO}) - 25(x_{BS} + x_{BH} + x_{BO}) - 10(x_{CS} + x_{CH} + x_{CO}) \\
= \;& -x_{AS} + 9x_{BS} + 24x_{CS} - 6.5x_{AH} + 3.5x_{BH} + 18.5x_{CH} - 12.5x_{AO} - 2.5x_{BO} + 12.5x_{CO}
\end{aligned}$$

Die Verschnitte sollen Mindestanteile der Whiskys der Hersteller A, B, C enthalten:

$$\begin{aligned}
x_{AS} &\geq 0.6(x_{AS} + x_{BS} + x_{CS}) \\
x_{CS} &\leq 0.2(x_{AS} + x_{BS} + x_{CS}) \\
x_{AH} &\geq 0.15(x_{AH} + x_{BH} + x_{CH}) \\
x_{CH} &\leq 0.6(x_{AH} + x_{BH} + x_{CH}) \\
x_{CO} &\leq 0.5(x_{AO} + x_{BO} + x_{CO})
\end{aligned}$$

Die Liefermengen sind durch die Hersteller begrenzt:

$$\begin{aligned} x_{AS}+x_{AH}+x_{AO} &\leq 2000\\ x_{BS}+x_{BH}+x_{BO} &\leq 2500\\ x_{CS}+x_{CH}+x_{CO} &\leq 1200 \end{aligned}$$

Wir haben insgesamt:

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrcl}
\max & -x_{AS} & +9x_{BS} & +24x_{CS} & -6.5x_{AH} & +3.5x_{BH} & +18.5x_{CH} & -12.5x_{AO} & -2.5x_{BO} & +12.5x_{CO} & & \\
s.t. & -0.4x_{AS} & +0.6x_{BS} & +0.6x_{CS} & & & & & & & \leq & 0\\
 & -0.2x_{AS} & -0.2x_{BS} & +0.8x_{CS} & & & & & & & \leq & 0\\
 & & & & -0.85x_{AH} & +0.15x_{BH} & +0.15x_{CH} & & & & \leq & 0\\
 & & & & -0.6x_{AH} & -0.6x_{BH} & +0.4x_{CH} & & & & \leq & 0\\
 & & & & & & & -0.5x_{AO} & -0.5x_{BO} & +0.5x_{CO} & \leq & 0\\
 & x_{AS} & & & +x_{AH} & & & +x_{AO} & & & \leq & 2000\\
 & & x_{BS} & & & +x_{BH} & & & +x_{BO} & & \leq & 2500\\
 & & & x_{CS} & & & +x_{CH} & & & +x_{CO} & \leq & 1200\\
 & & & & & & & & & x_{ij} & \geq & 0 \quad \forall i,j
\end{array}$$

(b) Da das primale Problem (abgesehen von den Vorzeichenrestriktionen) acht Ungleichungsnebenbedingungen enthält, hat das duale Problem acht Variable, die wir $u_1,\dots,u_8$ nennen. Damit hat das duale Problem die Form:

$$\begin{array}{lrrrrrrrrcl}
\min & & & & & & 2000u_6 & +2500u_7 & +1200u_8 & & \\
s.t. & -0.4u_1 & -0.2u_2 & & & & +u_6 & & & \geq & -1\\
 & 0.6u_1 & -0.2u_2 & & & & & +u_7 & & \geq & 9\\
 & 0.6u_1 & +0.8u_2 & & & & & & +u_8 & \geq & 24\\
 & & & -0.85u_3 & -0.6u_4 & & +u_6 & & & \geq & -6.5\\
 & & & 0.15u_3 & -0.6u_4 & & & +u_7 & & \geq & 3.5\\
 & & & 0.15u_3 & +0.4u_4 & & & & +u_8 & \geq & 18.5\\
 & & & & & -0.5u_5 & +u_6 & & & \geq & -12.5\\
 & & & & & -0.5u_5 & & +u_7 & & \geq & -2.5\\
 & & & & & 0.5u_5 & & & +u_8 & \geq & 12.5\\
 & & & & & & & & u_i & \geq & 0 \quad \forall i
\end{array}$$

(c) Für die drei Produkte S,H,O führen wir ganzzahlige Variable $x_S,x_H,x_O\in\mathbb{Z}$ ein, die die Anzahl der produzierten Flaschen bezeichnen. Es gelten dann die zusätzlichen Nebenbedingungen:

$$\begin{aligned} x_S &= \tfrac{1}{0.7}(x_{AS}+x_{BS}+x_{CS})\\ x_H &= \tfrac{1}{0.7}(x_{AH}+x_{BH}+x_{CH})\\ x_O &= \tfrac{1}{0.7}(x_{AO}+x_{BO}+x_{CO}) \end{aligned}$$

Hausübung

H 11 (A) (3 Punkte)

Betrachten Sie das Polyeder $\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b, i = 1, \ldots, m\}$. In $\mathcal{P}$ soll eine möglichst große Kugel $\mathcal{B}$ mit Mittelpunkt $x_c \in \mathcal{P}$ eingeschrieben werden, d.h.

$$\mathcal{B} = \{x_c + u : \|u\|_2 \leq r\}.$$

Formulieren Sie diese Problemstellung als lineares Problem in x_c und r.

(B) (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nichtsingulär und $b, c \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das LP

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array}$$

und zeigen Sie, dass für den Optimalwert p^* gilt:

$$p^* = \begin{cases} c^T A^{-1} b & \text{falls } A^{-T} c \leq 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(C) (2 Punkte)

Seien $c, \ell, u \in \mathbb{R}^n$ und sei $\ell \leq u$. Geben Sie eine explizite Lösung für folgendes LP an:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & \ell \leq x \leq u \end{array}$$

(A) (3 Punkte)

Die Aufgabe lautet, r zu maximieren unter der Nebenbedingung, dass $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$. Betrachten wir zunächst nur eine Nebenbedingung: $\mathcal{B}$ soll in dem Halbraum $a_i^T x \leq b_i$ enthalten sein, d.h.

$$\|u\|_2 \leq r \quad \Longrightarrow \quad a_i^T (x_c + u) \leq b_i.$$

Da $\sup\{a_i^T u : \|u\|_2 \leq r\} = r\|a_i\|_2$, kann diese Implikation geschrieben werden als

$$a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \leq b_i,$$

d.h. als lineare Ungleichung in x_c und r. Wenn man alle m Ungleichungen betrachtet, ergibt sich damit das LP

$$\begin{array}{ll} \max & r \\ \textit{s.t.} & a_i^T x_c + r\|a_i\|_2 \leq b_i, \qquad i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

(B) (3 Punkte)

Wir führen eine Variablentransformation durch und setzen $y = Ax$. Dann ist das Problem äquivalent zu

$$\begin{array}{ll} \min & c^T A^{-1} y \\ \textit{s.t.} & y \leq b \end{array}$$

Wenn $A^{-T} c \leq 0$, dann ist die Optimallösung $y = b$ mit $p^* = c^T A^{-1} b$. Anderenfalls ist das LP nach unten unbeschränkt.

(C) (2 Punkte)

Sowohl die Zielfunktion als auch die Nebenbedingungen sind separabel: Die Zielfunktion ist die Summe von Termen $c_i x_i$, und jede Nebenbedingung ist nur von einer Variablen abhängig. Die Optimallösung $\bar{x}$ erfüllt also folgende Bedingung: $\bar{x}_i$ minimiert $c_i x_i$ unter der Nebenbedingung $\ell_i \leq x_i \leq u_i$. Ist $c_i > 0$, so ist $\bar{x}_i = \ell_i$. Ist $c_i < 0$, so ist $\bar{x}_i = u_i$. Gilt $c_i = 0$, so ist jeder Wert x_i im Intervall $[\ell_i, u_i]$ optimal. Daher lautet der Optimalwert des Problems

$$p^* = \ell^T c^+ - u^T c^-,$$

wobei $c_i^+ = \max\{c_i, 0\}$ und $c_i^- = \max\{-c_i, 0\}$.

H 12 (7 Punkte)

Aus zwei Steinbrüchen S_1 und S_2 mit den Vorräten (in Tonnen) $s_1 = 4, s_2 = 23$ ist Schotter auf insgesamt drei Baustellen $B1, B_2, B_3$ zu transportieren. Die Bedarfsmeldungen sind $b_1 = 12, b_2 = 5, b_3 = 6$. Die Transportkosten (pro Tonne) sind wie folgt aufgeschlüsselt:

	B_1	B_2	B_3
S_1	12	5	13
S_2	11	16	17

(a) Geben Sie ein Modell zur Bestimmung eines Transportplans mit minimalen Kosten an.

(b) Bestimmen Sie das zugehörige Dualproblem.
Hinweis: Bringen Sie das primale Problem in die Form von Satz 4.3.

(c) Modellieren Sie das Primalproblem aus (a) sowie das Dualproblem aus (b) in ZIMPL und vergleichen Sie die Optimalwerte. *Abgabe:* Ausdruck der ZIMPL-Dateien sowie die Lösungen.

(a) (2 Punkte)
Sei $B := \{1,2,3\}$ die Menge der Baustellen und $S := \{1,2\}$ die Menge der Steinbrüche. Mit c_{ij} seien die Transportkosten von $i \in S$ nach $j \in B$ bezeichnet. Sei s_i der Vorrat in Steinbruch i und b_j der Bedarf auf Baustelle j. Die Variable $t_{ij} \geq 0$ modelliert die Menge Schotter, die von $i \in S$ nach $j \in B$ geliefert wird. Die Transportkosten sind zu minimieren:

$$\min \sum_{(i,j)\in S\times B} c_{ij} t_{ij}.$$

Die Nachfrage ist zu befriedigen:

$$\forall\, j \in B \qquad \sum_{i\in S} t_{ij} \geq b_j.$$

Jeder Steinbruch hat nur einen begrenzten Vorrat:

$$\forall\, i \in S \qquad \sum_{j\in B} t_{ij} \leq s_i.$$

(b) (3 Punkte)
Mit $\mathbf{t} = (t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21}, t_{22}, t_{23})^T$, $\mathbf{c} = (c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{21}, c_{22}, c_{23})^T$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, -s_1, -s_2)^T$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

lautet das primale Problem in der Form von Satz 4.3

$$\min \mathbf{c}^T\mathbf{t} \quad s.t. \quad A\mathbf{t} \geq \mathbf{b},\ \mathbf{t} \geq 0, \tag{1}$$

Das duale Problem ist somit gegeben durch

$$\max \mathbf{b}^T\mathbf{y} \quad s.t. \quad A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c},\ \mathbf{y} \geq 0. \tag{2}$$

(c) (2 Punkte)
ZIMPL-Modelle:
Zu (a):

```
set S := { 1 to 2};
set B := { 1 to 3};
param c[S*B] :=     |  1,  2,  3  |
                | 1 | 12,  5, 13  |
                | 2 | 11, 16, 17  |;
param s[S] := <1> 4, <2> 23;
param b[B] := <1> 12, <2> 5, <3> 6;
var t[S*B] real >= 0;

minimize cost: sum <i,j> in S cross B do c[i,j]*t[i,j];

subto demand: forall <j> in B do
   sum <i,j> in S*B do t[i,j] == b[j];
subto production: forall <i> in S do
   sum <i,j> in S*B  do t[i,j] <= s[i];
```

Zielfunktion: 270

Zu (b):

```
# Mengen
set S := { 1 to 2};
set B := { 1 to 3};

param c[S*B] :=     |  1,   2,   3  |
                      | 1 | 12,  5,  13  |
                      | 2 | 11, 16, 17  |;
param s[S] := <1> 4, <2> 23;
param b[B] := <1> 12, <2> 5, <3> 6;

# Variablen
var y[{1 to 5}] real >= 0;

# Zielfunktion
maximize profit: b[1]*y[1] + b[2]*y[2] + b[3]*y[3] - s[1]*y[4] - s[2]*y[5];

# Nebenbedingungen

subto NB1: y[1] - y[4] <= c[1,1];
subto NB2: y[2] - y[4] <= c[1,2];
subto NB3: y[3] - y[4] <= c[1,3];
subto NB4: y[1] - y[5] <= c[2,1];
subto NB5: y[2] - y[5] <= c[2,2];
subto NB6: y[3] - y[5] <= c[2,3];
```

Zielfunktion: 270

Die Zielfunktionswerte stimmen also überein.