Einführung in die Optimierung, Übung 3, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 8 Das Polyeder $\mathcal{P}(A,b)$ sei durch die folgenden Ungleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &\le 2 \\ -x_1 &\le 1 \\ -x_2 &\le 1 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 &\le -\tfrac{7}{2} \\ x_1 + 4x_2 &\le 14 \\ 7x_1 - 3x_2 &\le 5 \\ x_1 &\le 3 \end{aligned}$$

(a) Überführen Sie $\mathcal{P}(A,b)$ in ein Polyeder $\mathcal{P}^{=}(D,d) = \{x \in \mathbb{R}^p : Dx = d, x \ge 0\}$.

(b) Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Seitenflächen von $\mathcal{P}$, und geben Sie jeweils eine gültige Ungleichung an, durch welche die Seitenfläche induziert wird.

(c) Betrachten Sie nun das Polyeder $\mathcal{P}'$, welches aus $\mathcal{P}$ durch Hinzufügen der Ungleichung

$$-5x_1 + \tfrac{5}{2}x_2 \le -\tfrac{5}{2}$$

entsteht. Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Seitenflächen von $\mathcal{P}'$. Welche Ungleichungen sind für die Beschreibung von $\mathcal{P}'$ unwesentlich?

(a) Verwende $x_i = x_i^+ - x_i^-$ mit $x_i^+, x_i^- \ge 0$ und Schlupfvariable $y_j \ge 0$. Dann hat das Polyeder die Form:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 4x_1^+ & - & 4x_1^- & - & 2x_2^+ & + & 2x_2^- & + & y_1 & = & 2 \\ -x_1^+ & + & x_1^- & & & & & + & y_2 & = & 1 \\ & & & - & x_2^+ & + & x_2^- & + & y_3 & = & 1 \\ -\frac{1}{2}x_1^+ & + & \frac{1}{2}x_1^- & - & \frac{3}{2}x_2^+ & + & \frac{3}{2}x_2^- & + & y_4 & = & -\frac{7}{2} \\ x_1^+ & - & x_1^- & + & 4x_2^+ & - & 4x_2^- & + & y_5 & = & 14 \\ 7x_1^+ & - & 7x_1^- & - & 3x_2^+ & + & 3x_2^- & + & y_6 & = & 5 \\ x_1^+ & - & x_1^- & & & & & + & y_7 & = & 3 \end{array}$$

(b) Neben den trivialen Seitenflächen $\emptyset$ und $\mathcal{P}$ selbst hat $\mathcal{P}$ noch acht weitere nicht-triviale Seitenflächen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 4x_2 = 14\} \\ \mathcal{F}_2 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = -1\} \\ \mathcal{F}_3 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 = -\tfrac{7}{2}\} \\ \mathcal{F}_4 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 - 2x_2 = 2\} \\ \mathcal{F}_5 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : \tfrac{7}{2}x_1 - \tfrac{7}{2}x_2 = -\tfrac{3}{2}\} = \{(\tfrac{10}{7}, \tfrac{13}{7})\} \\ \mathcal{F}_6 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : 5x_1 + 2x_2 = 16\} = \{(2,3)\} \\ \mathcal{F}_7 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = \tfrac{5}{3}\} = \{(-1, \tfrac{8}{3})\} \\ \mathcal{F}_8 &= \mathcal{P} \cap \{x \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + x_2 = \tfrac{19}{4}\} = \{(-1, \tfrac{15}{4})\} \end{aligned}$$

(c) Es gilt: $-5x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le -\frac{5}{2} \iff 4x_1 - 2x_2 \ge 2$. Somit ist $\mathcal{P}'$ das Geradenstück zwischen den Punkten $(10/7, 13/7)$ und $(2,3)$ und besteht somit aus den Seitenflächen $\mathcal{F}_5$ und $\mathcal{F}_6$ sowie den trivialen Seitenflächen $\mathcal{P}'$ und $\emptyset$. Die Ungleichungen 3, 4, 5 und 7 sind unwesentlich zur Beschreibung von $\mathcal{P}'$.

G 9 (A) Welche der folgenden Mengen sind Polyeder? Begünden Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\mathcal{M}_1 := \{y_1 a_1 + y_2 a_2 : -1 \le y_1 \le 1, -1 \le y_2 \le 1\}$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\mathcal{M}_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0, \mathbb{1}^T x = 1, \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1, \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2, \}$, mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. $\mathbb{1}$ sei der Vektor in $\mathbb{R}^n$, dessen Komponenten alle gleich 1 sind,

(c) $\mathcal{M}_3 := \{x \in \mathbb{R}^n : x \ge 0, x^T y \le 1$ für alle y mit $\|y\|_2 = 1\}$,

(B) Eine Menge $\mathcal{K}$ heißt Kegel, wenn mit $x \in \mathcal{K}$ auch $\alpha x \in \mathcal{K}$ für jede Zahl $\alpha \geq 0$.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: *Jeder Kegel ist konvex.*

(b) Zeigen Sie: *Ein polyedrischer Kegel der Form $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$) hat höchstens einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.*

(A) (a) $\mathcal{M}_1$ ist ein Polyeder, da durch endlich viele lineare Ungleichungen beschrieben.

(b) $\mathcal{M}_2$ ist ein Polyeder, da durch endlich viele lineare Gleichungen und Ungleichungen beschrieben.

(c) Es gilt:

$$x^T y \leq 1 \quad \forall y \text{ mit } \|y\|_2 = 1 \quad \iff \quad \|x\|_2 \leq 1.$$

Beweis: ($\Longleftarrow$): Aus $\|x\|_2 \leq 1$ und $\|y\|_2 = 1$ folgt wegen der Ungleichung von Cauchy-Schwarz $1 \geq \|x\|_2\|y\|_2 \geq x^T y$.

($\Longrightarrow$): Angenommen, es existiert x mit $\|x\|_2 > 1$ und $x^T y \leq 1$ für alle y mit $\|y\|_2 = 1$. Setze $\hat{y} := (1/\|x\|_2)x$. Dann gilt $\|\hat{y}\|_2 = 1$, und

$$x^T \hat{y} = \frac{1}{\|x\|_2} x^T x = \|x\|_2 > 1,$$

ein Widerspruch.

Daher ist $\mathcal{M}_3$ der Durchschnitt von Einheitskugel $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ und $\mathbb{R}^n_+$. $\mathcal{M}_3$ kann zwar als Durchschnitt von Halbräumen beschrieben werden, aber nicht als Schnitt von endlich vielen Halbräumen, daher ist $\mathcal{M}_3$ kein Polyeder.

(B) (a) Nicht jeder Kegel ist konvex. Zum Beispiel die Menge $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ mit

$$\mathcal{K}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha e_1, \alpha \geq 0\}, \qquad \mathcal{K}_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha e_2, \alpha \geq 0\}$$

(e_1, e_2 die Einheitsvektoren in $\mathbb{R}^2$) ist ein Kegel, aber nicht konvex.

(b) Sei $x \in \mathcal{K}$, $x \neq 0$. Zu zeigen: x ist kein Extrempunkt.

Da mit $x \in \mathcal{K}$ auch $\alpha x \in \mathcal{K}$ für alle $\alpha \geq 0$, gilt

$$y = \tfrac{1}{2}x \in \mathcal{K} \qquad \text{und} \qquad z = \tfrac{3}{2}x \in \mathcal{K}.$$

Damit ist

$$x = \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z$$

eine Darstellung von x als echte Konvexkombination von Punkten aus $\mathcal{K}$, daher ist x kein Extrempunkt.

G 10 (A) Betrachten Sie die konvexe Funktion $f(x) = \max\{c^T x + \alpha, d^T x + \beta\}$. Formulieren Sie das Optimierungsproblem

$$\min\{f(x) : Ax = b, x \geq 0\}$$

als lineares Problem (lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen). Dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(B) Zum näherungsweisen Lösen überbestimmter Gleichungssysteme $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, wird oft ein Optimierungsproblem formuliert, in dem das Residuum bezüglich einer gegebenen Norm minimiert werden soll:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm für:

(a) Die Maximumnorm

$$\|v\|_\infty := \max_{i=1\dots m} |v_i|$$

(b) Die Summennorm

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{m} |v_i|$$

(A) Das Problem kann als lineares Optimierungsproblem formuliert werden, indem man eine zusätzliche Variable $y \in \mathbb{R}$ einführt. Bezeichnet man $y = \max\{c^T x + \alpha, d^T x + \beta\}$, so besteht das Optimierungsproblem darin, y zu minimieren. Als Nebenbedingungen erhält man aus der Definition von y:

$$c^T x + \alpha \leq y \qquad \text{und} \qquad d^T x + \beta \leq y.$$

Das LP lautet dann:

$$\begin{array}{ll} \min & y \\ s.t. & y - c^T x \geq \alpha \\ & y - d^T x \geq \beta \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

(B) (a) Wie in (A) führen wir eine zusätzliche Variable $t \in \mathbb{R}$ ein und setzen $t = \|Ax - b\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |A_{\cdot i} x - b_i|$.
Damit ergibt sich das folgende lineare Programm:

$$\begin{array}{ll} \min & t \\ s.t. & -t \leq A_{\cdot i} x - b_i \leq t \ , i = 1 \ldots m \\ & t \geq 0 \end{array}$$

(b) Zum Minimieren der Summe $\sum_{i=1}^m |A_{\cdot i} x - b_i|$ führen wir diesmal einen Vektor $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^m$ ein mit $t_i = |A_{\cdot i} x - b_i|$. Damit erhalten wir das lineare Programm

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^m t_i \\ s.t. & -t_i \leq A_{\cdot i} x - b_i \leq t_i \ , i = 1 \ldots m \\ & \mathbf{t} \geq 0 \end{array}$$

Hausübung

H 7 (5 Punkte)

Ein *Rad* ist ein Graph $W_n = (V, E)$ mit den Knoten $V := \{0, 1, \ldots, n\}$ und den Kanten

$$E := \{\{0, i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{i, i+1\} : i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{n, 1\}\}.$$

Sei das Polyeder P definiert durch

$$P := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} : \sum_{(i,j) \in E} x_{i,j} = 2 \;\forall\, i \in V,\; 0 \le x_e \le 1 \;\forall\, e \in E\}.$$

(a) Berechnen Sie die Dimension von P.

(b) Beweisen Sie, dass die Ungleichungen $x_e \ge 0$ für alle $e \in E$ redundant sind.

(c) Beweisen Sie, dass die Ungleichungen $x_{0,i} \le 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ redundant sind.

(a) (2 Punkte)

Behauptung: $\dim(\mathrm{P}) = |\mathrm{E}| - |\mathrm{V}|$. *Dazu ist zu zeigen:* $\mathrm{rang}(\mathrm{A}_{\mathrm{eq(P)}}) = |\mathrm{V}|$. *Da die Matrix $A_{\mathrm{eq(P)}}$ genau $|V|$ Zeilen hat, es bleibt zu zeigen, dass die Zeilen linear unabhängig sind. Seien also $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 A_{0\cdot} + \ldots + \lambda_n A_{n\cdot}$. Zu jedem $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ betrachten wir den von den Knoten $\{0, i, i+1\}$ und Kanten $\{(0, i), (0, i+1), (i, i+1)\}$ induzierten Dreieck. Die zugehörigen Einträge in der Matrix $A_{\mathrm{eq(P)}}$ sind:*

		Kanten		
		$(0, i)$	$(0, i+1)$	$(i, i+1)$
	0	1	1	0
Knoten	i	1	0	1
	$i+1$	0	1	1

Alle andreren Einträge in den Spalten sind gleich Null. Daher erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda_0 + \lambda_i &= 0 \\ \lambda_0 + \lambda_{i+1} &= 0 \\ \lambda_i + \lambda_{i+1} &= 0 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \lambda_0 = \lambda_i = \lambda_{i+1} = 0.$

(b) (1 Punkt)

Sei $1 \le i \le n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} 2 = x_{0,i} + x_{i-1,i} + x_{i,i+1} &\le x_{i-1,i} + 1 + 1 = x_{i-1,i} + 2 \\ &\Leftrightarrow \\ 0 &\le x_{i-1,i}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man $0 \le x_{0,i}$ und $0 \le x_{i-1,i}$.

(c) (2 Punkte)

Wir zeigen $x_{0,i} \le 1$ für $i \in \{1, \ldots, n\}$. (Falls $i = 1$ bzw. $i = n$ nehmen wir $i - 1 := n$ bzw. $i + 1 := 1$.) In der Radnarbe-Gleichung

$$x_{0,1} + \ldots + x_{0,i} + \ldots + x_{0,n} = 2$$

substituieren wir alle anderen Speichen $\neq (0, i)$ mittels der Gleichungen

$$x_{0,j} = 2 - x_{j-1,j} - x_{j,j+1}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} x_{0,i} &+ \sum_{j\neq i}(2 - x_{j-1,j} - x_{j,j+1}) = 2 \\ x_{0,i} &= 2 - 2(n-1) + x_{i-1,i} + x_{i,i+1} + \sum_{j\neq i,i+1} 2x_{j-1,j}. \end{aligned}$$

Nun setzen wir $x_{i-1,i} + x_{i,i+1} = 2 - x_{0,i}$ ein und schätzen mit Hilfe der Ungleichungen $x_{i,i+1} \leq 1$ ab:

$$2x_{0,i} = 2 - 2(n-2) + \sum_{j\neq i,i+1} 2x_{j-1,j} \leq 2 - 2(n-2) + 2(n-2) = 2.$$

Damit gilt $x_{0,i} \leq 1$.

H 8 (5 Punkte)

(A) Wir definieren den Träger von $x \in \mathbb{R}^n$ als $\operatorname{supp}(x) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \ : \ x_i \neq 0\}$. Beweisen Sie:

Für $x \in P^=(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) x *ist eine Ecke von* $P^=(A, b)$.

(2) $\operatorname{rang}(A_{\cdot \operatorname{supp}(x)}) = |\operatorname{supp}(x)|$.

(3) Die Spaltenvektoren $A_{\cdot j}$, $j \in \operatorname{supp}(x)$, *sind linear unabhängig.*

(B) Eine Matrix $A \in \{-1, 0, 1\}^{m\times n}$ heißt total unimodular, wenn für jede quadratische Untermatrix A' von A (d.h. A' ist durch Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgegangen) gilt:

$$\det(\mathrm{A}') \in \{-1, 0, 1\}.$$

Seien A total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Beweisen Sie: Ist A total unimodular, dann hat das Polyeder $P^=(A, b)$ nur ganzzahlige Ecken.

Lösungshinweis: Verwenden Sie (A) auf einen Eckpunkt x. In $A_{\cdot \operatorname{supp}(x)}$ finden Sie dann eine geeignete quadratische Untermatrix $A_{I \operatorname{supp}(x)}$. Stellen Sie x als Lösung des Gleichungssystem $A_{I \operatorname{supp}(x)} x_I = b_I$ dar. Dieses Gleichungssystem lässt sich mittels der Cramerschen Regel analysieren – was fällt an den dort vorkommenden Determinanten auf?

(A) (2 Punkte)

(1) $\Longrightarrow$ (2): Setze

$$D = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\mathcal{P}(D, d) = \mathcal{P}^=(A, b)$, und wir können den Satz 3.25 über die Charakterisierung der Ecken eines Polyeders der Form $\mathcal{P}(D, d)$ verwenden.

Sei dazu x eine Ecke von $\mathcal{P}^=(A, b)$. Dann ist x auch eine Ecke von $\mathcal{P}(D, d)$. Es gilt

$$D_{(\mathrm{eq}\{x\}\cdot)} = \begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_J \end{pmatrix}$$

mit $J = \{j : x_j = 0\} = \{1, \ldots, n\} \setminus \operatorname{supp}(x)$. Nun gilt

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A \\ -A \\ -I_J \end{pmatrix} = n = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A \\ -I_J \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Matrix streichen wir nun alle Spalten $j \in J$, d.h. die Spalten j mit $x_j = 0$. Es bleibt die Matrix $(A_{\cdot \operatorname{supp}(x)})$ übrig. Da die Spalten vor der Streichung linear unabhängig waren, sind sie es nachher auch, der Rang reduziert sich also zu

$$\operatorname{rang}(A_{\cdot \operatorname{supp}(x)}) = n - |J| = |\operatorname{supp}(x)|.$$

(2) $\Longrightarrow$ (1): Alle Schritte im ersten Teil des Beweises sind umkehrbar. Daraus folgt die Implikation.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3): folgt direkt aus der Definition von supp *und* rang.

(B) *(3 Punkte)*

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ eine Ecke von $P^=(A,b)$. Ist $\operatorname{supp}(x) = \emptyset$, so ist $x = 0$ und ganzzahlig. Ist $\operatorname{supp}(x) \neq \emptyset$, so zeigen wir, dass x_i ganzzahlig ist für jedes $i \in \operatorname{supp}(x)$. Mit (A) folgt

$$\mathrm{rang(A_{\cdot supp(x)}) = |supp(x)|.}$$

Da der Zeilenrang gleich dem Spaltenrang ist, gibt es eine Indexmenge $I \subset \{1,\dots,m\}$ mit $|I| = |\operatorname{supp}(x)|$ und die Zeilenvektoren $(A_{i\cdot})_{i\in I}$ sind linear unabhängig. Somit erhält man aus $A_{\cdot\operatorname{supp}(x)}$ mittels streichen der Zeilen $i \in \{1,\dots,m\} \setminus I$ die quadratische Untermatrix $A_{I\operatorname{supp}(x)}$ von A mit

$$\mathrm{rang(A_{Isupp(x)}) = |supp(x)|.}$$

Da A total unimodular ist, gilt $\mathrm{det(A_{Isupp(x)})} \in \{-1,0,1\}$. Da der Rang der Matrix maximal ist, scheidet die Null aus. Für die Ecke x gilt

$$A_{I\operatorname{supp}(x)} x_{\operatorname{supp}(x)} = b_i,$$

wobei $x_{\operatorname{supp}(x)}$ derjenige Teilvektor von x ist, den man durch Streichen aller Komponenten i mit $x_i = 0$ erhält. Nach der Cramer'schen Regel gilt

$$x_i = \frac{\mathrm{det(C)}}{\mathrm{det(A_{Isupp(x)}}}),$$

wobei C diejenige Matrix ist, die aus $A_{I\operatorname{supp}(x)}$ durch Ersetzen der i-Spalte durch b_I hervorgeht. Da C nur aus ganzen Zahlen besteht, ist $\det(\mathrm{C})$ *ganzzahlig. Also ist $x_i \in \mathbb{Z}$ für alle $i \in \operatorname{supp}(x)$.*

H 9 (5 Punkte)

(A) Der Hauptausschuss eines Unternehmens plant Ausgaben für das kommende Jahr. Es wurden sieben Projekte aus zwei Abteilungen A und B vorgelegt. Projekte 1, 2, 3 und 4 hat die Abteilung A vorgeschlagen, Projekte 5, 6, und 7 die Abteilung B. Der zu erwartende Aufwand und Gewinn ist bei allen Projekten in etwa gleich hoch, aber bei der Auswahl sind bestimmte Randbedingungen zu beachten. Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen.

(a) Das Budget reicht nicht für alle Projekte.
(b) Mindestens ein Projekt aus jeder Abteilung muss bewilligt werden.
(c) Projekt 7 kann nur dann gewählt werden, wenn Projekt 1 nicht gewählt wurde.
(d) Projekte 2 und 3 können nicht zusammen bewilligt werden und beide basieren auf Ergebnissen des Projektes 5.
(e) Es muss genau eine der Alternativen gewählt werden: entweder mindestens zwei Projekte aus der Abteilung A oder mindestens zwei Projekte aus der Abteilung B.

(B) Formulieren Sie das Optimierungsproblem mittels der Modellierungssprache ZIMPL und berechnen Sie die Lösungen mittels des MIP-Lösers SCIP. Die Informationen hierzu finden Sie auf der Internetseite der Veranstaltung (s. Informationsblatt).

Abgabe: Bitte die ausgedruckte ZIMPL-Datei sowie die Lösung in Zweiergruppen abgeben.

(A) *(3 Punkte)*

Zur Modellierung der Entscheidung, ob Projekt i durchgeführt wird, benötigen wir Binärvariablen, d.h. Variablen, die die Werte 0 oder 1 annehmen können. Für $i = 1,\dots,7$ sei

$$p_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Projekt } i \text{ durchgeführt wird} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ziel ist es, so viele Projekte wie möglich durchzuführen: $\max \sum_{i=1}^{7} p_i$.
Wir erhalten die Bedingungen:

1. $p_1 + \ldots + p_7 \leq 6$,
2. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \geq 1$,
   $p_5 + p_6 + p_7 \geq 1$
3. $p_7 \leq 1 - p_1$,
4. $p_2 + p_3 \leq p_5$,
5. *für* $x \in \{0, 1\}$*:* $1 + x \leq p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \leq 1 + 3x$,
   $2 - x \leq p_5 + p_6 + p_7 \leq 3 - 2x$.
   $x = 1$, *wenn mindestens zwei Projekte aus der Abteilung A gewählt werden,*
   $x = 0$, *wenn mindestens zwei Projekte aus der Abteilung B gewählt werden.*

(B) (2 Punkte)

ZIMPL-Modell:

```
set A := { 1 to 4 };
set B :={ 5 to 7 };
var p[A union B] binary;
var x binary;
maximize projects: sum <i> in A union B: p[i];
subto a: sum <i> in A union B: p[i] <= 6;
subto b1: sum <i> in A: p[i] >= 1;
subto b2: sum <i> in B: p[i] >= 1;
subto c: p[7] <= 1 - p[1];
subto d: p[2] + p[3] <= p[5];
subto e1: sum <i> in A: p[i] >= 1 + x;
subto e2: sum <i> in A: p[i] <= 1 + 3*x;
subto e3: sum <i> in B: p[i] >= 2 - x;
subto e4: sum <i> in B: p[i] <= 3 - 2*x;
```

Lösung:

Zielfuktionswert: 4

Variablen: $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, $p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 1$, $x = 0$