Einführung in die Optimierung, Übung 2, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 Welche der folgenden Funktionen sind konvex, welche konkav, welche weder konvex noch konkav?

(a) $f(x, y) = xy$,

(b) $f(x, y) = 2xy - x^2 - y^2$,

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ auf $\mathbb{R}^2_+$,

(d) jede Norm $\|x\|_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ auf $\mathbb{R}^n$,

(a) Die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *hat die Eigenwerte* $+1$ *und* -1 *und ist daher indefinit. Deshalb ist* f *weder konvex noch konkav.*

(b) Die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ *hat die Eigenwerte* 0 *und* -4 *und ist daher negativ semidefinit. Deshalb ist* f *konkav.*

(c) Die Hesse-Matrix lautet

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} \end{pmatrix}$$

die Eigenwerte sind $\frac{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{y^3}$*, was sowohl positiv als auch negativ sein kann. Es gibt also Punkte, an denen die Hesse-Matrix indefinit ist, daher ist* f *weder konvex noch konkav.*

(d) Jede Norm auf $\mathbb{R}^n$ *erfüllt (wegen der Normaxiome) die Definition einer konvexen Funktion: Seien* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *und sei* $\lambda \in [0, 1]$*. Dann ist*

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|_p \le \|\lambda x_1\|_p + \|(1-\lambda)x_2\|_p = \lambda\|x_1\|_p + (1-\lambda)\|x_2\|_p.$$

Daher ist jede Norm eine konvexe Funktion.

G 5 (A) Der Epigraph $\mathcal{E}(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathcal{E}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \le \alpha\}.$$

Stellen Sie $\mathcal{E}(f)$ für $f(x) = x^2$ grafisch dar und beweisen Sie folgenden Satz: *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Dann gilt:* f *ist konvex* $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}(f)$ *ist konvex.*

(B) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie: *Dann sind auch die Funktionen* αf_1, $f_1 + f_2$ *und* $\max[f_1, f_2]$ *konvex.*
Finden Sie Gegenbeispiele, die zeigen, dass (für f_1, f_2 konvex) die Funktionen $f_1 - f_2$, $\min[f_1, f_2]$ bzw. $f_1 \cdot f_2$ nicht notwendigerweise konvex sind.

(A) ($\Longrightarrow$) *Sei* f *konvex, und seien* $(x_1, \alpha_1), (x_2, \alpha_2) \in \mathcal{E}(f)$ *und* $\lambda \in [0, 1]$*. Wir müssen zeigen, dass*

$$\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2\Big) \in \mathcal{E}(f).$$

Da $(x_i, \alpha_i) \in \mathcal{E}(f)$*, gilt laut Definition des Epigraphen* $f(x_i) \le \alpha_i$ *für* $i = 1, 2$*. Da* f *konvex ist, gilt*

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\le \lambda \underbrace{f(x_1)}_{\le \alpha_1} + (1-\lambda) \underbrace{f(x_2)}_{\le \alpha_2} \\ &\le \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2. \end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass $\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2\Big) \in \mathcal{E}(f)$*.*

($\Longleftarrow$) Sei $\mathcal{E}(f)$ konvex, und seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0,1]$. Nach Definition des Epigraphen sind die Punkte

$$\Big(x_1, f(x_1)\Big), \Big(x_2, f(x_2)\Big) \in \mathcal{E}(f).$$

Da $\mathcal{E}(f)$ konvex ist, gilt

$$\Big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2,\ \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)\Big) \in \mathcal{E}(f).$$

Dies ist gleichbedeutend damit, dass

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

daher ist f konvex.

(B) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$, und sei $\lambda \in [0,1]$.
Beweis für αf_1: Aus $f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)$ folgt für $\alpha \geq 0$:

$$\alpha\Big[f_1(\lambda x + (1-\lambda)y)\Big] \leq \alpha\Big[\lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y)\Big] = \lambda\Big(\alpha f_1\Big)(x) + (1-\lambda)\Big(\alpha f_1\Big)(y).$$

Beweis für $f_1 + f_2$:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f_1(x) + (1-\lambda) f_1(y) \\ f_2(\lambda x + (1-\lambda)y) &\leq \lambda f_2(x) + (1-\lambda) f_2(y) \end{aligned}$$

Addition der beiden Gleichungen liefert das Gesuchte:

$$\Big(f_1 + f_2\Big)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\Big(f_1 + f_2\Big)(x) + (1-\lambda)\Big(f_1 + f_2\Big)(y).$$

Beweis für $\max[f_1, f_2]$: analog.
Alternative: Verwende Epigraphen: $\mathcal{E}(\max[f_1, f_2]) = \mathcal{E}(f_1) \cap \mathcal{E}(f_2)$. Als Durchschnitt zweier konvexer Mengen ist $\mathcal{E}(\max[f_1, f_2])$ eine konvexe Menge, daher ist $\max[f_1, f_2]$ eine konvexe Funktion.
Gegenbeispiele: $(f_1 - f_2)(x) = x - x^2$, $\min[x^2, (x-1)^2]$ und $(f_1 \cdot f_2)(x) = x \cdot x^2$ sind nicht konvex.

G 6 Formulieren Sie als Optimierungsproblem und untersuchen Sie, ob die Zielfunktion und die zulässige Menge konvex sind:

Ein Käufer möchte 150 000 Stück einer Ware kaufen. Drei Verkäufer legen Angebote vor, die in der folgenden Tabelle beschrieben sind. Es sind jeweils die Fixkosten (sie entstehen unabhängig davon, wie viel gekauft wird) und die Stückpreise in GE angegeben. Diese können je nach gekaufter Menge variieren. Außerdem ist die Lieferkapazität der Verkäufer beschränkt.

Seien x_1, x_2 bzw. x_3 die Stückzahl, die bei Verkäufer 1, 2 bzw. 3 gekauft wird. Ziel ist es, so einzukaufen, dass die Gesamtkosten minimal sind.

Verkäufer	Fixkosten	Stückpreis	Menge
1	3 520.20	51.20	$0 < x_1 \leq 50\,000$
2	82 810.00	52.10	$0 < x_2 \leq 20\,000$
		51.10	$20\,000 < x_2 \leq 60\,000$
		50.10	$60\,000 < x_2 \leq 80\,000$
		49.10	$80\,000 < x_2 \leq 100\,000$
3	0	60.50	$0 < x_3 \leq 50\,000$
		59.00	$50\,000 < x_3 \leq 80\,000$

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass beispielsweise für Verkäufer 2 das 20 001ste Stück zu einem günstigeren Preis angeboten wird als die ersten 20 000 Stück.

Die Kostenfunktionen $f(x_i)$ für Verkäufer i haben folgende Form:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_1 = 0 \\ 3\,520.20 + 51.20x_1 & \text{für} \quad 0 < x_1 \leq 50\,000 \end{cases}$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x_2 = 0 \\ 82\,810.00 + 52.10x_2 & \text{für} \quad 0 < x_2 \leq 20\,000 \\ 1\,124\,810.00 + 51.10(x_2 - 20\,000) & \\ = 102\,810.0 + 51.10x_2 & \text{für} \quad 20\,000 < x_2 \leq 60\,000 \\ 162\,810.00 + 50.10x_2 & \text{für} \quad 60\,000 < x_2 \leq 80\,000 \\ 242\,810.00 + 49.10x_2 & \text{für} \quad 80\,000 < x_2 \leq 100\,000 \end{cases}$$

$$f_3(x_3) = \begin{cases} 60.50x_3 & \text{für} \quad 0 \leq x_3 \leq 50\,000 \\ 75\,000.00 + 59.00x_3 & \text{für} \quad 50\,000 < x_3 \leq 80\,000 \end{cases}$$

Die Zielfunktion, die minimiert werden soll, hat dann die Form $f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3)$.

Nebenbedingungen sind $x_1 + x_2 + x_3 = 150\,000$, da der Gesamtbedarf gedeckt werden muss, und die Kapazitätsbeschränkungen $0 \leq x_1 \leq 50\,000$ für Verkäufer 1, $0 \leq x_2 \leq 100\,000$ für Verkäufer 2 und $0 \leq x_3 \leq 80\,000$ für Verkäufer 3. Damit haben wir das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) \\ s.t. & x_1 + x_2 + x_3 = 150\,000 \\ & 0 \leq x_1 \leq 50\,000 \\ & 0 \leq x_2 \leq 100\,000 \\ & 0 \leq x_3 \leq 80\,000 \\ & x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} \end{array}$$

Die zulässige Menge ist nicht konvex, da das Problem Ganzzahligkeitsbedingungen enthält. f_1, f_2, f_3 sind konkav, daher ist die Zielfunktion ebenfalls konkav.

G 7 Bekanntlich heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin, wenn f die Form $f(x) = a^T x + b$ hat, mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) *Eine affine Funktion ist sowohl konvex als auch konkav.*

(b) *Eine Funktion, die sowohl konvex als auch konkav ist, ist affin.*

(a) Durch einfaches Einsetzen in die Definition sieht man, dass affine Funktionen konvex und konkav sind.

(b) Eine Funktion, die sowohl konvex als auch konkav ist, erfüllt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \ \forall \lambda \in [0,1]$$

Definiere $b := f(0)$ und $g(x) := f(x) - f(0) = f(x) - b$. Dann gilt $g(0) = 0$, und g erfüllt ebenfalls die obige Ungleichung.

Wir zeigen als nächstes, dass

$$g(\alpha x) = \alpha g(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sei zunächst $\alpha > 1$. Mit $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ ist $\lambda \in [0,1]$ und $x = \lambda \cdot \alpha x + (1-\lambda) \cdot 0$. Daher

$$g(x) = g(\lambda \cdot \alpha x + (1-\lambda) \cdot 0) = \lambda g(\alpha x) + (1-\lambda) g(0) = \tfrac{1}{\alpha} g(\alpha x),$$

also $g(\alpha x) = \alpha g(x)$.
Für $\alpha \in [0,1]$ vertauschen sich die Rollen von α und λ.

Für $\alpha < -1$ *setzt man* $\lambda = \frac{1}{1-\alpha}$ *und verwendet* $0 = \lambda \cdot \alpha x + (1-\lambda)x$, *um zu sehen:*

$$0 = g(0) = \frac{1}{1-\alpha} g(\alpha x) - \frac{\alpha}{1-\alpha} g(x),$$

woraus $g(\alpha x) = \alpha g(x)$ *sofort folgt.*
Für $\alpha \in [-1, 0]$ *vertausche wieder die Rollen von* α *und* λ.

Mit ähnlichen Argumenten zeigt man, dass

$$g(x+y) = g(x) + g(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Nun verwenden wir die Darstellung $x = \sum_{i=1}^n x_i e^i$, *wobei* e^i *der* i*-te Einheitsvektor ist. Damit gilt:*

$$g(x) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i e^i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(e^i).$$

Setzen wir $a_i = g(e^i)$, *so haben wir* $g(x) = a^T x$, *und damit ist die gewünschte Darstellung*

$$f(x) = a^T x + b$$

gefunden.

Hausübung

H 4 (5 Punkte)

(A) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Definitionen:
Definition 1: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für beliebige Punkte $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_p \ge 0$ mit $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i).$$

(B) Beweisen Sie: *Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:*

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{M}\} = \max\{f(x) : x \in \operatorname{conv}\mathcal{M}\}.$$

(A) (3 Punkte)
Definition 2 $\Longrightarrow$ Definition 1: ist trivial. Definition 1 $\Longrightarrow$ Definition 2: Beweis mittels Induktion: Für $p = 2$ ist die Äquivalenz klar. Nehmen wir also an, die Aussage sei für p gezeigt, und schließen auf $p+1$. Zu diesem Zweck seien $x_1, \dots, x_{p+1} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1} \ge 0$ mit $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$ gegeben. O.B.d.A. ist $\lambda_{p+1} \ne 1$. Wir schreiben:

$$\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \lambda_{p+1} x_{p+1} = (1-\lambda_{p+1}) z + \lambda_{p+1} x_{p+1},$$

wenn wir $z = \sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} x_i$ definieren. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{p+1}} \sum_{i=1}^p \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_{p+1}} \left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i - \lambda_{p+1}\right) = 1,$$

und $\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} \ge 0$ für alle $i = 1, \dots, p$. Daher erhalten wir folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
f\left(\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i x_i\right) &= f\Big((1-\lambda_{p+1}) z + \lambda_{p+1} x_{p+1}\Big) \\
&\le (1-\lambda_{p+1}) f(z) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) \\
&= (1-\lambda_{p+1}) f\left(\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} x_i\right) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) \\
&\le (1-\lambda_{p+1}) \left[\sum_{i=1}^p \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{p+1}} f(x_i)\right] + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i) + \lambda_{p+1} f(x_{p+1}) \\
&= \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i f(x_i).
\end{aligned}$$

Die erste Ungleichung gilt, weil die Aussage für $p = 2$ gilt, die zweite Ungleichung gilt, weil die Aussage laut Annahme für p gilt. Damit ist die Aussage für $p+1$ gezeigt.

(B) (2 Punkte)

Da $\mathcal{M}$ kompakt ist und $\mathcal{M} \subset \operatorname{conv}\mathcal{M}$ sind existieren $x_1 \in \mathcal{M}$ und $x_2 \in \operatorname{conv}\mathcal{M}$, so dass $f(x_1) = \max\{f(x) : x \in \mathcal{M}\}$ und $f(x_2) = \max\{f(x) : x \in \operatorname{conv}\mathcal{M}\}$.

Wir wollen zeigen, dass $f(x_1) = f(x_2)$ gilt.

1. Da $\mathcal{M} \subset \operatorname{conv}\mathcal{M}$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$.

2. Da $x_2 \in \operatorname{conv}\mathcal{M}$, existieren $y_1, \ldots, y_p \in \mathcal{M}$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1$, so dass $x_2 = \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_p y_p$. Da f konvex ist, gilt nach Definition 2*:*

$$f(x_2) = f(\lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_p y_p) \leq \lambda_1 f(y_1) + \ldots + \lambda_p f(y_p) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_p f(x_1) = f(x_1).$$

H 5 (5 Punkte)

(A) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion ($x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$). Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(f(x))$ auch konvex ist.

Finden Sie ein Beispiel, das die Notwendigkeit der Voraussetzung zeigt, dass g monoton wachsend ist.

(B) Die (untere) Niveaumenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Niveau β ist definiert durch

$$\mathcal{L}(f, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \beta\}$$

Beweisen Sie: *f ist konvex $\implies$ $\mathcal{L}(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$.*

Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt.

(C) Beweisen Sie: *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann ist* $\operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C})$ *d.h. die Menge der Punkte, wo f ihr Minimum über $\mathcal{C}$ annimmt, konvex.*

(A) (2 Punkte)

Seien $x, y \in \mathcal{M}$ und $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g(f(\lambda x + (1-\lambda)y)) \\ &\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) \\ &\leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda)g(f(y)) = \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y). \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung basiert auf der Voraussetzung, dass g monoton wachsend und f konvex ist. Die zweite Ungleichung basiert auf der Voraussetzung, dass g konvex ist.

Beispiel, dass g monoton wachsend sein muss:

Wenn $g(x) = e^{-x}$ und $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, dann ist $h(x) = e^{-x^2}$. g und f sind konvex, aber h nicht. Beweis: betrachte die zweite Ableitung der Funktion f, g und h.

(B) (2 Punkte)

Seien $x, y \in \mathcal{L}(f, \beta)$ und $\lambda \in [0, 1]$. Da f konvex ist, haben wir:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda\beta + (1-\lambda)\beta = \beta.$$

Daher gilt $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{L}(f, \beta)$.

Gegenbeispiel für die Umkehrung: $f(x) = \ln x$.

(C) (1 Punkt)

Wir haben $x \in \operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C}) \Leftrightarrow f(x) \leq f(z)$ gilt für alle $z \in \mathcal{C}$. Seien $y \in \operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C})$ und $\lambda \in [0, 1]$. Da f konvex ist, gilt

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \leq \lambda f(z) + (1-\lambda)f(z) = f(z)$$

für alle $z \in \mathcal{C}$. Daher $\lambda x + (1-\lambda)y \in \operatorname{argmin}(\mathrm{f}, \mathcal{C})$.

H 6 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$f(x) \le \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (a, b)$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le \frac{f(b) - f(x)}{b-x}.$$

Machen Sie eine Skizze, die diese Ungleichung illustriert.

(c) Sei f differenzierbar. Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass

$$f'(a) \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le f'(b).$$

(a) (2 Punkte) $x \in [a, b]$ bedeutet, dass es ein $\lambda \in [0, 1]$ geben muss mit $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$. Daraus ergibt sich, dass

$$\lambda = \frac{b-x}{b-a}.$$

Einsetzen in die Definition einer konvexen Funktion ergibt die Ungleichung.

(b) (2 Punkte) Aus (a) erhält man

$$(b-a)f(x) \le (b-x)f(a) + (x-a)f(b),$$

was dasselbe ist wie

$$(b-a)f(x) \le (b-a)f(a) + (x-a)\Big(f(b) - f(a)\Big),$$

woraus sich die linke Ungleichung sofort ergibt. Die rechte Ungleichung erhält man ganz analog. Anschaulich bedeutet dies, dass der Anstieg der Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ zwischen den Anstiegen der Sekanten durch $(a, f(a))$ und $(x, f(x))$ bzw. durch $(x, f(x))$ und $(b, f(b))$ liegt.

(c) (1 Punkt) Aus (b) folgt

$$f'(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \le \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Die rechte Ungleichung ergibt sich analog.