## Einführung in die Optimierung, Übung 1, Lösungsvorschlag

### Gruppenübung

**G 1** Das Management eines Krankenhauses hat folgenden Bedarf an Krankenpflegern bzw. Krankenschwestern:

| Zeit | benötigte Schwestern/Pfleger |
|---|---|
| 0.00 bis 4.00 | 50 |
| 4.00 bis 8.00 | 60 |
| 8.00 bis 12.00 | 40 |
| 12.00 bis 16.00 | 50 |
| 16.00 bis 20.00 | 30 |
| 20.00 bis 24.00 | 25 |

Das Pflegepersonal arbeitet in 8-Stunden-Schichten, wobei eine Schicht um 0, 4, 8, 12, 16 oder 20 Uhr beginnt. Es soll ein Dienstplan erstellt werden, der mit der kleinstmöglichen Anzahl an Pflegern bzw. Schwestern auskommt.

Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem. Ist die zulässige Menge konvex?

*Bezeichne mit $x_1, x_2, \ldots, x_6$ die Anzahl der Personen, die um 0 Uhr, 4 Uhr, …, 20 Uhr ihre Schicht beginnen.*

*Das Optimierungsproblem lautet dann:*

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
\min & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & & & & & & & + & x_6 & \geq & 50 \\
 & x_1 & + & x_2 & & & & & & & & & \geq & 60 \\
 & & & x_2 & + & x_3 & & & & & & & \geq & 40 \\
 & & & & & x_3 & + & x_4 & & & & & \geq & 50 \\
 & & & & & & & x_4 & + & x_5 & & & \geq & 30 \\
 & & & & & & & & & x_5 & + & x_6 & \geq & 25 \\
 & & & & & & & & & & x_1, \ldots, & x_6 & \geq & 0 \\
 & & & & & & & & & & x_1, \ldots, & x_6 & \in & \mathbb{Z}
\end{array}
$$

*Da das Problem Ganzzahligkeitsbedingungen enthält, ist die zulässige Menge nicht konvex.*

**G 2** Zeigen Sie, dass folgende Mengen konvex sind:

(a) jede Hyperebene $\mathcal{H}$ der Form

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$;

(b) jeder von einer Hyperebene $\mathcal{H}$ erzeugte abgeschlossene Halbraum

$$\mathcal{H}^a = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \alpha\};$$

(c) die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$;

(d) die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems $Ax \leq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ (das Ungleichheitszeichen ist dabei zeilenweise zu verstehen);

(e) jede abgeschlossene Kugel um einen gegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vom Radius $\alpha > 0$

$$\mathcal{B}_\alpha(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \alpha\}.$$

*a) Seien $x, y \in \mathcal{H}$ und $\lambda \in [0, 1]$. Wir müssen zeigen, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \mathcal{H}$.*

$$
\begin{array}{ccc}
x \in \mathcal{H} & \Longrightarrow & a^T x = \alpha \\
y \in \mathcal{H} & \Longrightarrow & a^T y = \alpha
\end{array}
$$

*Multiplizieren wir die erste Gleichung mit $\lambda$, die zweite Gleichung mit $(1-\lambda)$ und addieren die beiden Gleichungen, so erhalten wir*

$$a^T\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) = \alpha,$$

*woraus $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{H}$ folgt.*

*b)–d) analog.*

*e) Seien $x, y \in \mathcal{B}_\alpha(x_0)$ und $\lambda \in [0,1]$. Es gilt:*

$$\begin{aligned}
\Big\|\Big(\lambda x + (1-\lambda)y\Big) - x_0\Big\| &= \|\lambda(x-x_0) + (1-\lambda)(y-x_0)\| \\
&\leq \lambda \underbrace{\|x-x_0\|}_{\leq\alpha} + (1-\lambda)\underbrace{\|y-x_0\|}_{\leq\alpha} \\
&\leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

*Daher ist $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{B}_\alpha(x_0)$.*

**G 3** Ein Erzeuger von Tierfutter produziert ein Gemisch aus drei Bestandteilen: zwei nährstoffreiche Bestandteile und ein Füllmittel. Ein Kilogramm Futter muss einen Minimalgehalt an Nährstoffen enthalten:

| Nährstoff | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| Gramm | 90 | 50 | 20 | 2 |

Die nährstoffreichen Bestandteile setzen sich wie folgt zusammen:

| | A | B | C | D | Kosten/kg |
|---|---|---|---|---|---|
| Bestandteil 1 in Gramm/kg | 100 | 80 | 40 | 10 | 40 |
| Bestandteil 2 in Gramm/kg | 200 | 150 | 20 | – | 60 |

Das Futtergemisch soll so erzeugt werden, dass die Kosten möglichst gering sind. Formulieren Sie dies als Optimierungsproblem. Skizzieren Sie die zulässige Menge. Ist sie konvex?

*Sei* $x_1 =$ *kg Bestandteil 1 in einem kg Futtermittel,*
$x_2 =$ *kg Bestandteil 2 in einem kg Futtermittel.*

*Mit diesen Variablen lautet das Optimierungsproblem:*

$$\begin{array}{lrcrcl}
\min & 40x_1 & + & 60x_2 & & \\
s.t. & 100x_1 & + & 200x_2 & \geq & 90 \\
 & 80x_1 & + & 150x_2 & \geq & 50 \\
 & 40x_1 & + & 20x_2 & \geq & 20 \\
 & 10x_1 & & & \geq & 2 \\
 & x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\
 & & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

*Die zulässige Menge dieses Problems ist durch ein System von linearen Ungleichungen beschrieben und daher konvex.*

**Hausübung**

**H 1** (5 Punkte)

Beweisen Sie:

(A) *Der Durchschnitt einer beliebigen Familie konvexer Mengen ist wieder eine konvexe Menge.*

(B) *Die konvexe Hülle einer Menge $\mathcal{M}$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus $\mathcal{M}$.*

*(A) Sei $\mathcal{C}_i$ $(i \in \mathcal{I})$ eine Familie konvexer Mengen, wobei $\mathcal{I}$ eine beliebige Indexmenge ist. Zu zeigen: $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_i$ ist konvex.*
*Seien $x, y \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_i$ und $\lambda \in [0,1]$. Da jedes $\mathcal{C}_i$ konvex ist, gilt*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathcal{C}_i \quad \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

*Daher muss auch*

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_i$$

*gelten, $\bigcap_{i\in\mathcal{I}} \mathcal{C}_i$ ist also konvex.*

*(B) Sei $\operatorname{comb}\mathcal{M}$ die Menge aller Konvexkombinationen von Elementen aus $\mathcal{M}$.*
*Behauptung: $\operatorname{conv}\mathcal{M} = \operatorname{comb}\mathcal{M}$.*
*Laut der Definition und der Aussage von H1 (A) ist $\operatorname{conv}\mathcal{M}$ eine konvexe Menge, die alle Elemente aus $\mathcal{M}$ enthält. Daher gilt $\operatorname{comb}\mathcal{M} \subset \operatorname{conv}\mathcal{M}$ nach Satz 2.4.*
*Weiterhin gilt $\mathcal{M} \subseteq \operatorname{comb}\mathcal{M}$. Um jetzt $\operatorname{conv}\mathcal{M} \subset \operatorname{comb}\mathcal{M}$ zu beweisen, zeigen wir, dass $\operatorname{comb}\mathcal{M}$ eine konvexe Menge ist. Seien $x, y \in \operatorname{comb}\mathcal{M}$. D.h.*

$$x := \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i, \qquad\qquad y := \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i,$$

*wobei $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ und $\sum_{i=1}^{q} \mu_i = 1$. Sei $\alpha \geq 0$. Dann*

$$\alpha x + (1-\alpha)y = \alpha \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{q} \mu_i y_i$$

*Da*

$$\alpha \sum_{i=1}^{p} \lambda_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{q} \mu_i = 1$$

*gilt, ist $\alpha x + (1-\alpha)y$ eine Konvexkombination von Elementen aus $\mathcal{M}$, d.h. $\alpha x + (1-\alpha)y \in \mathcal{M}$ und damit ist $\operatorname{comb}\mathcal{M}$ eine konvexe Menge. Da $\operatorname{conv}\mathcal{M}$ der Durchschnitt aller konvexen Mengen ist, die $\mathcal{M}$ enthalten, gilt $\operatorname{conv}\mathcal{M} \subset \operatorname{comb}\mathcal{M}$.*

**H 2** (5 Punkte)

(A) Sei $\mathcal{C}$ die konvexe Hülle der vier Punkte $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (-1,3)$ und $P_4 = (-2,1)$.

- (I) Beschreiben Sie $\mathcal{C}$ durch lineare Ungleichungen.
- (II) Stellen Sie den Punkt $Q = (-1,2) \in \mathcal{C}$ als Konvexkombination von $P_1, \ldots, P_4$ dar. Wie viele der $P_i$ benötigt man dafür höchstens?

(B) Beschreiben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe linearer Ungleichungen:

- (I) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$
- (II) $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1\}$

*(AI) Die Menge $\mathcal{C}$ wird durch folgende vier Ungleichungen beschrieben:*

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leq 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 7 \\ -2x_1 + x_2 &\leq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

*(AII) Die Darstellung $Q = \sum_{i=1}^4 \lambda_i P_i$ mit $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 1$ ist nicht eindeutig. Nach dem Satz von Carathéodory benötigt man höchstens drei der $P_i$. Eine Darstellung von $Q$ als Konvexkombination von $P_2$, $P_3$ und $P_4$ ist beispielsweise gegeben durch*

$$Q = \tfrac{1}{8}P_2 + \tfrac{1}{2}P_3 + \tfrac{3}{8}P_4.$$

*(BI)* $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \leq 1, -x_i \leq 1, \forall i = 1, \dots, n\}$

*(BII)* $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n v_i x_i \leq 1 \ \forall v \in \{-1,1\}^n\}$. *Beachten Sie, dass aus einer nichtlinearen Ungleichung $2^n$ lineare Ungleichungen wurden!*
*Alternative:* $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq y_i \leq 1, -y_i \leq x_i \leq y_i, \sum_{i=1}^n y_i \leq 1\}$.

**H 3** (5 Punkte)

Zur Finanzierung eines Großprojekts hat ein Unternehmen zu Beginn des Jahres 2007 in den folgenden sechs Jahren Bedarf an Finanzierungsmitteln, und zwar

24 Mio. für das Jahr 2007,
20 Mio. für das Jahr 2008,
27 Mio. für das Jahr 2009,
29 Mio. für das Jahr 2010,
31 Mio. für das Jahr 2011,
23 Mio. für das Jahr 2012.

Die Mittel will man sich über langfristige Anleihen am Kapitalmarkt besorgen. Anleihen können am 1. Januar jedes Jahres aufgenommen werden und müssen zum 31. Dezember 2012 zurückgezahlt werden, wobei die Verzinsung in der Rückzahlungssumme enthalten ist. Der Rückzahlungskurs für die Anleihen beträgt

aus dem Jahr 2007: 147%,
aus dem Jahr 2008: 139%,
aus dem Jahr 2009: 129%,
aus dem Jahr 2010: 121%,
aus dem Jahr 2011: 113%,
aus dem Jahr 2012: 106%.

Die Operations Research Abteilung steht nun vor der Frage, wie die Volumina der sechs Anleihen aussehen sollen, da es unter Umständen günstig sein kann, Anleihen auf Vorrat aufzunehmen. In jedem Jahr können die nicht benötigten Mittel zu jeweils 5.3% Verzinsung angelegt werden. Formulieren Sie das geschilderte Problem als Optimierungsproblem.

*Sei $\mathcal{J} := \{2007, \dots, 2012\}$ und $b_j$ der Bedarf an Finanzmitteln im Jahr $j \in \mathcal{J}$. Sei $a_j$ der Rückzahlungswert der Anleihe aus Jahr $j \in \mathcal{J}$. Sei $z := 1.053$ der Zins, zu dem das Unternehmen Geld anlegen kann. Wir führen die Variablen $k_j$ und $r_j$ ein, die den Kredit bzw. Rest im Jahr $j \in \mathcal{J}$ modellieren. Ziel ist es, die Gesamtkosten des Vorhabens zu minimieren:*

$$\min \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j k_j$$

*Im Jahr 2007 muss der Kredit den Bedarf übersteigen:*

$$k_{2007} \geq b_{2007}.$$

*Nimmt das Unternehmen mehr Geld auf als benötigt, so bleibt ein Rest:* $r_{2007} := k_{2007} - b_{2007}$. *Der Bedarf in allen Folgejahren wird gedeckt durch das übrig gebliebene Geld aus dem Vorjahr sowie einen neuen Kredit:*

$$\begin{aligned} &k_j + r_{j-1}z \geq b_j, \\ &r_j := k_j + r_{j-1}z - b_j, \qquad j = 2008, \ldots, 2012. \end{aligned}$$