Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1./2. Feb. 2007

Einführung in die Optimierung, Übung 13

Gruppenübung

G 33 (A) Bestimmen Sie jeweils die Menge der zulässigen Richtungen in x^*:

(a) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \leq 2\}$, $x^* = (1,1)$,

(b) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 3x_2^2 \leq 1, x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + \frac{1}{2} \leq 0\}$, $x^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(B) Betrachten Sie das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \quad f(x)$$

mit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. Überprüfen Sie jeweils, ob der Punkt x^*

(i) sicher kein lokaler Minimalpunkt ist,

(ii) eventuell ein lokaler Minimalpunkt sein könnte.

(a) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,1)^T$.

(b) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 2\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,0)^T$.

(c) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (0,0)^T$.

(d) $\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 1, x_2 \geq 2\}$; $x^* = (1,2)^T$; $\nabla f(x^*) = (1,0)^T$.

G 34 Betrachten Sie das quadratische Optimierugsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x.$$

(a) Schreiben Sie die notwendigen Bedingungen erster Ordnung für ein lokales Minimum auf. Wann existiert ein stationärer Punkt (= ein Punkt, der diese Bedingungen erfüllt)?

(b) Unter welchen Bedingungen an Q besitzt f ein lokales Minimum?

(c) Unter welchen Bedingungen an Q besitzt f einen stationären Punkt, aber weder ein Minimum noch ein Maximum?

G 35 Betrachten Sie das Problem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{s.t.} & -3x_1 - x_2 + 10 \leq 0 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 0 \\ & -x_1 - 3x_2 \leq 0 \end{array}$$

Lösen Sie dieses Problem grafisch.

(a) Folgern Sie, dass ein lokaler Minimalpunkt x^* existiert und zeigen Sie, dass in der grafischen Lösung die KKT-Bedingungen erfüllt sind. Bestimmen sie dabei auch den zugehörigen Lagrange-Multiplikator u^*.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der KKT-Bedingungen, dass sich im zweiten Eckpunkt $\bar{x}$ des Polyeders $\mathcal{P}(A,b)$ kein Optimum befindet.

G 36 Betrachten Sie folgendes Mehrzieloptimierungsproblem, d.h ein Optimierungsproblem mit zwei Zielfunktionen

$$(MZP) \qquad \begin{array}{ll} \min & f_1(x) \\ \min & f_2(x) \\ \text{s.t.} & g_i(x) \le 0 \quad (i = 1, \dots, m). \end{array}$$

Im Allgemeinen gibt es keinen zulässigen Punkt x^*, der beide Zielfunktionen gleichzeitig optimiert, man muss sich daher einen anderen Optimalitätsbegriff überlegen.

Man nennt einen zulässigen Punkt x^* effizient (auch: Pareto-optimal), wenn es keinen anderen zulässigen Punkt y gibt, so dass

$$f_i(y) \le f_i(x^*) \quad \text{für alle } i = 1, 2 \qquad \text{und} \qquad f_i(y) < f_i(x^*) \quad \text{für ein } i = 1, 2.$$

(a) Zeichnen Sie die Menge der effizienten Punkte für das Mehrzielproblem

$$\begin{array}{ll} \min & x_1 \\ \min & x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ & 2x_1 + x_2 \ge 6 \\ & x_1 \le 4 \\ & x_2 \le 4. \end{array}$$

(b) Nun betrachten wir eine gewichtete Summe der beiden Zielfunktionen, wobei $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$ die Gewichte seien. Zeigen Sie: Ist x^* (globaler) Minimalpunkt des Problems

$$(P_\alpha) \qquad \begin{array}{ll} \min & [\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)] \\ \text{s.t.} & g_i(x) \le 0 \quad (i = 1, \dots, m), \end{array}$$

dann ist x^* effizient für (MZP).