

Hausübung

H 30 (5 Punkte)

- Zeigen Sie: (a) Für jedes $r \in \mathbb{Q}$ gilt: $|r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1$.
(b) Für je zwei rationale Zahlen $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt: $\langle rs \rangle \leq \langle r \rangle + \langle s \rangle$.

H 31 (5 Punkte)

- (A) Betrachten Sie das Polyeder $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx \leq d\}$ mit

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt die Ellipsoidmethode höchstens um zu entscheiden, ob $\{x \in \mathbb{R}^n : Cx < d\}$ leer ist oder \mathcal{P} einen Punkt enthält?

- (B) In der j -ten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_j = (0, 0)^T$ und $A_j = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ gegeben. Sei $x + y \leq -1$ eine der verletzten Ungleichungen. Stellen Sie diese Situation graphisch dar. Bestimmen Sie a_{j+1} und A_{j+1} und stellen Sie das zugehörige Ellipsoid graphisch dar.

H 32 (5 Punkte)

- (A) Betrachten Sie folgendes Polytop in \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\leq -2 \\ 3x_1 &\leq 4 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leq 3 \end{aligned}$$

Stellen Sie mit Hilfe der Ellipsoidmethode fest, ob das Polytop leer ist oder nicht. Verwenden Sie als Anfangsellipsoid einen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 7. (Rechnen Sie bitte auf vier Nachkommastellen genau.)

- (B) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie, dass A durch die Definition

$$\langle x, y \rangle_A := x^T A y$$

ein inneres Produkt auf \mathbb{R}^n induziert. Mit $\|x\|_A := \sqrt{\langle x, x \rangle_A}$ ist dann eine Norm auf \mathbb{R}^n definiert. Beweisen Sie für diese Norm die Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle_A| \leq \|x\|_A \|y\|_A.$$

Welche Gestalt hat die Einheitskugel dieser Norm?