Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18./19. Jan. 2007

Einführung in die Optimierung, Übung 11

Gruppenübung

G 31 Eine Möbelfirma stellt Regale, Tische, Stühle und Betten her. Zur Herstellung eines Produktes sind 3, 2, 1 bzw. 2 Arbeitsstunden, 4, 3, 3 bzw. 4 Einheiten Holz und jeweils eine Einheit Metall erforderlich. Es stehen 225 Arbeitsstunden, 117 Einheiten Metall und 420 Einheiten Holz zur Verfügung. Der Gewinn des Herstellers beträgt 19 Euro pro Regal, 13 Euro pro Tisch, 12 Euro pro Stuhl und 17 Euro pro Bett. Zur Bestimmung eines optimalen Produktionsplans hat die OR-Abteilung folgendes LP aufgestellt:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl}
\max & 19x_1 & + & 13x_2 & + & 12x_3 & + & 17x_4 & & \\
\text{s.t.} & 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 225 \\
 & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & \leq & 420 \\
 & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 117 \\
 & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0
\end{array}$$

und mittels des Simplex-Verfahrens gelöst. Optimallösung ist $\bar{x} = (39, 0, 48, 30)^T$ mit Zielfunktionswert 1827. Optimale Basis ist $B = (1, 3, 4)$, Nichtbasis entsprechend $N = (2, 5, 6, 7)$. Die Inverse der Basismatrix lautet:

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Reoptimieren Sie den Produktionsplan $x = (39, 0, 48, 30)^T$ der Möbelfirma mit den Methoden der Sensitivitätsanalyse, falls jeweils eine der folgenden Änderungen berücksichtigt werden soll:

(a) Es sollen höchstens doppelt so viele Regale wie Tische hergestellt werden.

(b) Der Gewinn pro Stuhl steigt von 12 auf 14 Euro.

(c) Der zur Verfügung stehende Vorrat an Holz verringert sich von 420 auf 400 Einheiten.

(d) Es werden zusätzlich noch Schränke hergestellt, die mit einem Gewinn von 15 Euro verkauft werden können. Zur Herstellung eines Schrankes werden 1 Arbeitsstunde, 2 Einheiten Metall und 2 Einheiten Holz benötigt.

(e) Durch die Anschaffung neuer Maschinen verringert sich die zur Herstellung eines Tisches nötige Arbeitszeit auf 1 Stunde.

G 32 (A) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie das Ellipsoid $\mathcal{E}(A, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$.

(B) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid

$$\mathcal{E}(A, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$$

das Bild der Einheitskugel $\mathcal{B} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 \leq 1\}$ unter der affinen Transformation $f(u) = A^{1/2}u + a$ ist. Damit ergibt sich als äquivalente Darstellung von $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E}(A, a) = \{a + A^{1/2}u : \|u\|_2 \leq 1\}.$$

Hausübung

H 27 (5 Punkte)

(A) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und seien $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1. \end{array}$$

(B) Zeigen Sie, dass Ellipsoide konvexe Mengen sind.

(C) Zeigen Sie, dass für das Volumen des Ellipsoids $\mathcal{E} = \mathcal{E}(A,a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$ gilt:

$$\text{vol } \mathcal{E} = \sqrt{\det A} \cdot \text{vol } \mathcal{B},$$

wobei $\mathcal{B}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ ist.

H 28 (5 Punkte)

Um eine zulässige Startbasis für das lineare Programm

$$(LP1) \qquad \begin{array}{rrl} \min & c^T x & \\ & Ax & \leq b \\ & x & \geq 0 \end{array}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ zu bestimmen, betrachten wir an Stelle der Phase I des Simplex-Algorithmus das lineare Programm aus H19:

$$(LP2) \qquad \begin{array}{lrcl} \min & -z & & \\ \text{s.t.} & Ax & \leq & zb \\ & z & \leq & 1 \\ & x, z & \geq & 0 \end{array}$$

Wie kann man mittels einer optimalen Basis von (LP2) eine zulässige Basis für (LP1) bestimmen oder entscheiden, dass (LP1) unzlässig ist? Entwickeln Sie ein Verfahren und beweisen Sie dessen Korrektheit. Wenden Sie Ihr Verfahren auf die folgenden linearen Programme an:

$$\begin{array}{lrcrl} \min & -x_1 & - & x_2 & \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & x_1 & - & 2x_2 & \leq -6 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0, \end{array} \qquad \begin{array}{lrcrl} \min & -x_1 & - & x_2 & \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq -1 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & \leq 0 \\ & x_1, & & x_2 & \geq 0. \end{array}$$

Zur Erinnerung: (LP2) besitzt stets eine Optimallösung z_opt mit optimalem Zielfunktionswert 0 oder -1, insbesondere gilt also $z_{opt} = 0$ oder $z_{opt} = 1$.

Hinweis: Bringen Sie (LP1) und (LP2) zunächst in Standardform und identifizieren Sie die Schlupfvariablen geeignet.

H 29 (5 Punkte)

Betrachten Sie ein Netzwerk bestehend aus n Knoten. Zwischen je zwei Knoten sollen gerichtete Kanten (in beide Richtungen) vorhanden sein. Die Variable x_{ij} beschreibt den Fluss von Knoten i zum Knoten j, die Kosten für diesen Fluss betragen $c_{ij}x_{ij}$, wobei c_{ij} gegebene Konstanten sind. Für den Fluss x_{ij} gibt es eine obere Schranke u_{ij} und eine untere Schranke $\ell_{ij} \geq 0$.

Den Zufluss in Knoten i bezeichnen wir mit b_i. $b_i > 0$ bedeutet, dass ein externer Fluss bei Knoten i in das Netz fließt, $b_i < 0$ bedeutet, dass ein Fluss der Größe $|b_i|$ bei Knoten i aus dem Netz fließt. Wir nehmen an, dass $\sum_{i=1}^n b_i = 0$. In jedem Knoten soll außerdem die Flusserhaltung gelten: Die Summe der Flüsse in Knoten i hinein ist gleich der Summe der Flüsse aus Knoten i heraus.

Man möchte nun die Gesamtkosten des Flusses durch das Netz unter den beschriebenen Nebenbedingungen minimieren. Formulieren Sie dies als lineares Optimierungsproblem.