Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11./12. Jan. 2007

# Einführung in die Optimierung, Übung 10

## Gruppenübung

**G 29** Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeigen Sie zunächst, dass die Schlupfvariablen $x_5, x_6, x_7$ eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\
 & & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

**G 30** Seien $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang und $H$ eine zulässige Basis von

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & b^T y & & & & \\
\text{s.t.} & A^T y & + & Iz & = & c \\
 & & & z & \geq & 0
\end{array}$$

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: *Entweder ist dieses LP unbeschränkt oder es existiert eine optimale Basis $H_{opt}$ mit $\{1, \ldots, m\} \subseteq H_{opt}$.*

*Hinweis:* Betrachten Sie das lineare Problem in der Form

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & b^T y^+ & - & b^T y^- & & & & \\
\text{s.t.} & A^T y^+ & - & A^T y^- & + & Iz & = & c \\
 & & & & & y^+, y^-, z & \geq & 0
\end{array}$$

Nehmen Sie an, dass $y_1^+$ und $y_1^-$ nicht in der zulässigen Basis $H$ sind. Betrachten Sie die reduzierten Kosten von $y_1^+$ bzw. $y_1^-$. Zeigen Sie anhand der Schritte FTRAN und Ratio-Test des Simplex-Algorithmus, dass das Problem unbeschränkt ist oder dass $y_1^+$ bzw. $y_1^-$ gegen ein $z_i$ mit $i \in H$ ausgetauscht werden kann. Teilen Sie dazu $\gamma$ im Ratio-Test in $\gamma_1, \gamma_2$ auf, wobei $\gamma_1$ das Minimum über $y_i$ mit $i \in H$ und $\gamma_2$ entsprechend das Minimum über $z_i$ mit $i \in H$ ist. Zeigen Sie, dass Sie immer ein $z_i$ als Austauschvariable für $y_1^+$ bzw. $y_1^-$ wählen können.

**Hausübung**

**H 24** (5 Punkte)

(A) Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeigen Sie zunächst, dass die Schlupfvariablen $x_5, x_6, x_7$ eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\
 & -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\
 & x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\
 & & & & & \multicolumn{3}{r}{x_1, x_2, x_3, x_4} & \geq & 0.
\end{array}$$

(B) Formulieren Sie als LP:

$$\begin{array}{lrcl}
\min & \max\{x_1, x_4\} & & \\
\text{s.t.} & |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| & \leq & 10 \\
 & \max\{x_1, x_2\} & \leq & \min\{x_3, x_4\} \\
 & \dfrac{x_2 - x_4}{x_1 + x_3 + 1} & \leq & 4 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

**H 25** (5 Punkte)

Gegeben seien zwei Punktemengen $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \ldots, v^K\}$ und $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \ldots, w^L\}$ in $\mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine Hyperebene, die $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ trennt, d.h. gesucht sind $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass

$$a^T v^i \leq \alpha \quad \text{für } i = 1, \ldots, K \qquad \text{und} \qquad a^T w^j \geq \alpha \quad \text{für } j = 1, \ldots, L.$$

Die triviale Lösung $a = 0$, $\alpha = 0$ soll ausgeschlossen sein. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Zulässigkeitsproblem, also als ein LP mit beliebiger Zielfunktion. Setzen Sie voraus, dass die affine Hülle der $K + L$ Punkte Dimension $n$ hat, d.h. es gilt

$$\text{rang}\begin{pmatrix} v^1 & v^2 & \ldots & v^K & w^1 & w^2 & \ldots & w^L \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = n + 1.$$

**H 26** (5 Punkte)

Was ist an der folgenden Argumentation falsch? Geben Sie für jede Abschätzung an, ob und warum sie richtig oder falsch ist.

Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{array}{rcll}
\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} & \leq & \min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} & (1) \\
 & \leq & \max\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} & (2) \\
 & \leq & \min\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} & (3) \\
 & \leq & \max\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} & (4) \\
 & \leq & \min\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} & (5) \\
 & \leq & \max\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} & (6) \\
 & \leq & \min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} & (7) \\
 & \leq & \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} & (8)
\end{array}$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere zwischen den letzten beiden Zeilen, und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.