Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11./12. Jan. 2007

Einführung in die Optimierung, Übung 10

Gruppenübung

G 29 Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeigen Sie zunächst, dass die Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\
& -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\
& x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\
& & & & & & & x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

G 30 Seien $b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit vollem Zeilenrang und H eine zulässige Basis von

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & b^T y & & & & \\
\text{s.t.} & A^T y & + & Iz & = & c \\
& & & z & \geq & 0
\end{array}$$

Beweisen Sie folgenden Satz aus der Vorlesung: *Entweder ist dieses LP unbeschränkt oder es existiert eine optimale Basis H_{opt} mit $\{1, \ldots, m\} \subseteq H_{opt}$.*

Hinweis: Betrachten Sie das lineare Problem in der Form

$$\begin{array}{lrcrcrcl}
\max & b^T y^+ & - & b^T y^- & & & & \\
\text{s.t.} & A^T y^+ & - & A^T y^- & + & Iz & = & c \\
& & & & & y^+, y^-, z & \geq & 0
\end{array}$$

Nehmen Sie an, dass y_1^+ und y_1^- nicht in der zulässigen Basis H sind. Betrachten Sie die reduzierten Kosten von y_1^+ bzw. y_1^-. Zeigen Sie anhand der Schritte FTRAN und Ratio-Test des Simplex-Algorithmus, dass das Problem unbeschränkt ist oder dass y_1^+ bzw. y_1^- gegen ein z_i mit $i \in H$ ausgetauscht werden kann. Teilen Sie dazu γ im Ratio-Test in γ_1, γ_2 auf, wobei γ_1 das Minimum über y_i mit $i \in H$ und γ_2 entsprechend das Minimum über z_i mit $i \in H$ ist. Zeigen Sie, dass Sie immer ein z_i als Austauschvariable für y_1^+ bzw. y_1^- wählen können.

Hausübung

H 24 (5 Punkte)

(A) Lösen Sie folgendes Optimierungsproblem mit dem dualen Simplex-Algorithmus. Zeigen Sie zunächst, dass die Schlupfvariablen x_5, x_6, x_7 eine Startbasis bilden.

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\min & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & 6x_4 & \leq & 14 \\
& -2x_1 & - & x_2 & - & 5x_3 & + & 3x_4 & \leq & -25 \\
& x_1 & & & + & 2x_3 & - & 2x_4 & \leq & 14 \\
& & & & & & x_1, x_2, & x_3, x_4 & \geq & 0.
\end{array}$$

(B) Formulieren Sie als LP:

$$\begin{array}{lrcl}
\min & \max\{x_1, x_4\} & & \\
\text{s.t.} & |x_1 + x_2 + x_3 + x_4| & \leq & 10 \\
& \max\{x_1, x_2\} & \leq & \min\{x_3, x_4\} \\
& \dfrac{x_2 - x_4}{x_1 + x_3 + 1} & \leq & 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

H 25 (5 Punkte)

Gegeben seien zwei Punktemengen $\mathcal{V} = \{v^1, v^2, \ldots, v^K\}$ und $\mathcal{W} = \{w^1, w^2, \ldots, w^L\}$ in $\mathbb{R}^n$. Gesucht ist eine Hyperebene, die $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ trennt, d.h. gesucht sind $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ so dass

$$a^T v^i \leq \alpha \quad \text{für } i = 1, \ldots, K \qquad \text{und} \qquad a^T w^j \geq \alpha \quad \text{für } j = 1, \ldots, L.$$

Die triviale Lösung $a = 0$, $\alpha = 0$ soll ausgeschlossen sein. Formulieren Sie dieses Problem als lineares Zulässigkeitsproblem, also als ein LP mit beliebiger Zielfunktion. Setzen Sie voraus, dass die affine Hülle der $K + L$ Punkte Dimension n hat, d.h. es gilt

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} v^1 & v^2 & \ldots & v^K & w^1 & w^2 & \ldots & w^L \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = n + 1.$$

H 26 (5 Punkte)

Was ist an der folgenden Argumentation falsch? Geben Sie für jede Abschätzung an, ob und warum sie richtig oder falsch ist.

Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{aligned}
\max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (1) \\
&\leq \max\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (2) \\
&\leq \min\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (3) \\
&\leq \max\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (4) \\
&\leq \min\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (5) \\
&\leq \max\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (6) \\
&\leq \min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (7) \\
&\leq \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (8)
\end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere zwischen den letzten beiden Zeilen, und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.