Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14./15. Dez. 2006

Einführung in die Optimierung, Übung 8

Gruppenübung

G 23 (A) Betrachten Sie das LP

$$\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\min & -x_1 & + & x_2 & & & & & & & & \\
\text{s.t.} & -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & & & & = & 4 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & & & = & 12 \\
& x_1 & + & 2x_2 & & & & & - & x_5 & = & 4 \\
& & & & & & & & & x_1,\dots,x_5 & \geq & 0
\end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_5)^T = (2, 3, 0, 0, 4)^T$ eine zulässige Basislösung des LPs ist.

(b) Ausgehend von dieser Basis, lösen Sie das LP mit dem Simplex-Algorithmus.

(B) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des folgenden LPs:

$$\begin{array}{lrcrcl}
\max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & - & 2x_2 & \leq & -6 \\
& & & x_1, x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

Hinweis: Wenn nötig, betrachten Sie auch das duale LP.

G 24 Ein Hersteller erzeugt die Produkte X_1, X_2, X_3 und X_4. Zur Erzeugung der Produkte sind Arbeitszeit sowie die Rohstoffe A und B nötig, wie in der folgenden Tabelle angegeben.

	Produkt				
Input	X_1	X_2	X_3	X_4	verfügbar
Personenwochen	1	2	1	2	20
kg Material A	6	5	3	2	100
kg Material B	3	4	9	2	75
Produktionsniveau	x_1	x_2	x_3	x_4	

Der Verkauf einer Einheit von Produkt X_1 bringt 6 GE Gewinn, für X_2, X_3 und X_4 beträgt der Gewinn 4 GE, 7 GE bzw. 5 GE. Die Produktionsniveaus der vier Produkte sollen so bestimmt werden, dass der Gewinn maximal wird.

Modellieren Sie diese Problemstellung als LP und lösen Sie es mit dem Simplex-Algorithmus.

G 25 Bei einer großen deutschen Fondsgesellschaft werden die Wertpapierportfolios anhand von Faktoren zusammengestellt, von denen das Fondsmanagement überzeugt ist, dass sie die jeweiligen Aktien gut beschreiben. Die Faktoren: Konjunkturabhängigkeit, Euro/Dollar-Wechselkursabhängigkeit, und Marktkapitalisierung (Wert aller Aktien des Unternehmens) werden benutzt. Das Management benutzt Targets (Zielwerte, die auf langjähriger Erfahrung beruhen), die es mit dem gesuchten Portfolio möglichst gut annähern will: die Konjunkturabhängigkeit sollte 4 sein, die Euro/Dollar-Wechselkursabhängigkeit 7 und die Marktkapitalisierung 12. Der betrachtete Marktausschnitt bestehe aus den folgenden Aktien:

Name	Konjunktur	Euro/Dollar	Marktkapitalisierung
Deutsche Bank	2	12	15
DaimlerChrysler	9	15	13
BASF	7	8	6
Eon	3	2	5

(a) Stellen Sie ein lineares Problem zur Bestimmung eines Portfolios auf, das den gegebenen Targets in der Maximumsnorm möglichst nahe kommt. Dabei soll das gesamte Kapital investiert werden. Es dürfen keine Aktien leer verkauft werden.

(b) Formulieren Sie für das LP aus (a) das duale LP. Wie kann die Lösung der dualer Programme interpretiert werden?

(c) Formulieren Sie auch das entsprechende Optimierungsproblem, das bei Verwendung der 2-Norm entsteht.

Hausübung

H 18 (5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes LP:

$$\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & 12x_4 & & \\
\text{s.t.} & -2x_1 & - & 9x_2 & + & x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\
 & \frac{1}{3}x_1 & + & x_2 & - & \frac{1}{3}x_3 & - & 2x_4 & \leq & 0 \\
 & & & & & & & x_1, \dots, x_4 & \geq & 0
\end{array}$$

Überführen Sie das LP in Standardform (fügen Sie für die Ungleichungen die Schlupfvariablen x_5 und x_6 ein). Dann ist $B := (5, 6)$ eine zulässige Basis, mit der der Simplex-Algorithmus gestartet werden kann.

Verwenden Sie bei Pricing und Ratio-Test folgende Auswahlregeln:

- Pricing: die Nichtbasisvariable x_j mit den kleinsten reduzierten Kosten tritt in die Basis ein,
- Ratio-Test: stehen mehrere Basisvariablen x_{B_i} zur Auswahl, so verläßt die mit dem kleinsten Index i die Basis.

Zeigen Sie, dass der Simplex-Algorithmus mit diesen Auswahlregeln in einer nicht optimalen Ecke hängenbleibt (*zykelt* oder *kreiselt*).

H 19 (5 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben, sei $y \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie das LP

$$\begin{array}{lrcl}
\min & -y & & \\
\text{s.t.} & Ax & \leq & yb \\
 & y & \leq & 1 \\
 & x, y & \geq & 0
\end{array}$$

Zeigen Sie, dass dieses LP stets eine Optimallösung besitzt und dass der optimale Zielfunktionswert entweder 0 oder -1 ist.

H 20 (5 Punkte)

A furniture maker has a line of four types of desks. They vary in the manufacturing processes and their profitability. The furniture maker has avaiable 6000 hours of time in the carpentry shop, and 4000 hours of time in the finishing shop. Each desk of type 1 required 4 hours of carpentry and 1 hour of finishing. Each desk of type 2 requires 9 hours of carpentry and 1 hour of finishing. Each desk of type 3 requires 7 hours of carpentry and 3 hours of finishing. Each desk of type 4 requires 10 hours of carpentry and 40 hours of finishing. The profit is \$12 for each desk of type 1, \$20 for each desk of type 2, \$28 for each desk of type 3, and \$40 for each desk of type 4. How should the production be scheduled to maximize the profit? Model this problem by linear programming and solve your model with the Simplex algorithm. Does your solution coincide with SCIP's answer?