Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

30.11./1.12 2006

Einführung in die Optimierung, Übung 6

Gruppenübung

G 17 Beweisen Sie die nachstehende Folgerung aus dem Farkas-Lemma:

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$Ax \le b \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcl} y^T A & = & 0 \\ y & \ge & 0 \\ y^T b & < & 0. \end{array}$$

G 18 Gegeben sei das lineare Programm (LP):

$$\begin{array}{lll} \min & x_1 - x_3 & \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 & \le 5 \\ & x_2 + 2x_3 & = 6 \\ & x_1, x_2, x_3 & \ge 0. \end{array}$$

(a) Bestimmen Sie das dazugehörige duale lineare Programm (DLP).

(b) Stellen Sie die Bedingung des komplementären Schlupfes für die Programme auf und benutzen Sie diese, um (LP) und (DLP) zu lösen.

G 19 In praktischen Anwendungen sind Problemdaten oft nicht exakt bekannt, sondern nur mit einer gewissen Fehlertoleranz. Betrachten wir dies am Beispiel der Nebenbedingungsmatrix A eines linearen Problems: Für die Komponenten von A seien obere und untere Schranken bekannt, d.h. es sind B und V gegeben so dass

$$A \in \mathcal{A} = \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} : B_{ij} - V_{ij} \le A_{ij} \le B_{ij} + V_{ij} \text{ für alle } i = 1, \dots, m \text{ und } j = 1, \dots, n\}.$$

Dann hat man folgendes Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \text{ für alle } A \in \mathcal{A}. \end{array}$$

Formulieren Sie dies als LP.

Hausübung

H 13 (5 Punkte)

Beweisen Sie die nachstehende Folgerung aus dem Farkas-Lemma, unter Ausnutzung geeigneter Resultate.

Für dimensionsverträgliche Matrizen A, B, C und D sowie Vektoren a, b, u und v hat genau eines der beiden folgenden Systeme eine Lösung:

$$\begin{array}{rcrcl} Ax & + & By & \leq & a \\ Cx & + & Dy & = & b \\ x & & & \geq & 0 \end{array} \qquad \dot{\bigvee} \qquad \begin{array}{rcrcl} u^T A & + & v^T C & \geq & 0 \\ u^T B & + & v^T D & = & 0 \\ u & & & \geq & 0 \\ u^T a & + & v^T b & < & 0. \end{array}$$

H 14 (5 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Lösbarkeit des folgenden LPs:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -x_1 & - & 2x_2 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 \\ & -3x_1 & - & 2x_2 & \leq & -4 \\ & & & x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

(b) Betrachten Sie das LP

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b \end{array}$$

und untersuchen Sie, welche Lösungsfälle auftreten können.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine dimensionsverträgliche Matix. Seien $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie: *Entweder existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = c$ oder es existiert ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^T y = 0, c^T y = 1$.*

Hinweis: Verwenden Sie das in Aufgabe H 13 gezeigte Resultat.

H 15 (5 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Paar primaler und dualer Probleme (P) und (D):

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array} \qquad \text{und} \qquad (D) \quad \begin{array}{ll} \max & -b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y = -c \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Zeigen Sie: *Hat (D) eine endliche Optimallösung, so ist die zulässige Menge von (P) nicht leer.*