Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

23./24. November 2006

Einführung in die Optimierung, Übung 5

Gruppenübung

G 14 Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$(P) \qquad \begin{array}{rrcrcrcrcrcl} \min & 7x_1 & - & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\ \text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\ & 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\ & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\ & 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\ & & & & & & & & & x_1,\dots,x_5 & \geq & 0 \end{array}$$

Formulieren Sie das duale Problem zu (P).

Hinweis: Bringen Sie (P) zunächst in natürliche Form.

G 15 In der Vorlesung wurde gezeigt (Satz 4.3):

Das zu

$$\min c^T x \quad s.t. \quad Ax \geq b,\ x \geq 0 \tag{P}$$

duale Problem kann geschrieben werden in der Form

$$\max b^T y \quad s.t. \quad A^T y \leq c,\ y \geq 0. \tag{D}$$

Zeigen Sie: Das zu (D) duale Problem ist (P).

Hinweis: Wandeln Sie zunächst (D) in ein äquivalentes Minimierungsproblem um.

G 16 Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch die Produktionskapazitäten der drei Hersteller werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

Hersteller A	höchstens 2000 Liter zu 35 EUR je Liter,
Hersteller B	höchstens 2500 Liter zu je 25 EUR,
Hersteller C	höchstens 1200 Liter zu je 10 EUR.

Daraus stellt er drei Verschnitte *Sir Roses*, *Highland Wind* und *Old Regent* her, die er zu 34 EUR, 28,50 EUR bzw. 22,50 EUR pro Liter verkauft. Die Zusammensetzung der Verschnitte ist:

Sir Roses	wenigstens 60% von A,
	höchstens 20% von C,
Highland Wind	wenigstens 15% von A,
	höchstens 60% von C,
Old Regent	höchstens 50% von C.

Wie sollten die Mischungen aussehen und wieviel sollte von jeder Mischung hergestellt werden, um einen maximalen Gewinn zu erzielen?

(a) Modellieren Sie dieses Problem als LP.

(b) Stellen Sie das dazugehörige duale LP auf. Wie kann die Lösung interpretiert werden?

(c) Was muss an dem Modell aus (a) geändert werden, wenn man berücksichtigt, dass der Whisky nur flaschenweise verkauft wird (eine Flasche = 0.7 Liter).

Hausübung

H 11 (A) (3 Punkte)

Betrachten Sie das Polyeder $\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \le b, i = 1, \dots, m\}$. In $\mathcal{P}$ soll eine möglichst große Kugel $\mathcal{B}$ mit Mittelpunkt $x_c \in \mathcal{P}$ eingeschrieben werden, d.h.

$$\mathcal{B} = \{x_c + u : \|u\|_2 \le r\}.$$

Formulieren Sie diese Problemstellung als lineares Problem in x_c und r.

(B) (3 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nichtsingulär und $b, c \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das LP

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \le b \end{array}$$

und zeigen Sie, dass für den Optimalwert p^* gilt:

$$p^* = \begin{cases} c^T A^{-1} b & \text{falls } A^{-T} c \le 0 \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

(C) (2 Punkte)

Seien $c, \ell, u \in \mathbb{R}^n$ und sei $\ell \le u$. Geben Sie eine explizite Lösung für folgendes LP an:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & \ell \le x \le u \end{array}$$

H 12 (7 Punkte)

Aus zwei Steinbrüchen S_1 und S_2 mit den Vorräten (in Tonnen) $s_1 = 4, s_2 = 23$ ist Schotter auf insgesamt drei Baustellen $B1, B_2, B_3$ zu transportieren. Die Bedarfsmeldungen sind $b_1 = 12, b_2 = 5, b_3 = 6$. Die Transportkosten (pro Tonne) sind wie folgt aufgeschlüsselt:

	B_1	B_2	B_3
S_1	12	5	13
S_2	11	16	17

(a) Geben Sie ein Modell zur Bestimmung eines Transportplans mit minimalen Kosten an.

(b) Bestimmen Sie das zugehörige Dualproblem.
Hinweis: Bringen Sie das primale Problem in die Form von Satz 4.3.

(c) Modellieren Sie das Primalproblem aus (a) sowie das Dualproblem aus (b) in ZIMPL und vergleichen Sie die Optimalwerte. *Abgabe:* Ausdruck der ZIMPL-Dateien sowie die Lösungen.