Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

16./17. November 2006

Einführung in die Optimierung, Übung 4

Gruppenübung

G 11 Betrachten Sie das lineare Optimierungsproblem $\max\{c^T x : x \in \mathcal{P}\}$, wobei das Polyeder $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$ gegeben ist mit

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Für welche Vektoren $c \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ hat das lineare Problem

(a) genau eine Optimallösung,
(b) unendlich viele Optimallösungen,
(c) keine Optimallösung?

Geben Sie eine Ungleichung $a^T x \leq \alpha$ (mit $a \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$) an, so dass das lineare Problem

$$\max\{c^T x : Ax \leq b, a^T x \leq \alpha\}$$

für jedes $c \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mindestens eine Optimallösung hat.

G 12 (A) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Seien $c \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Wenn ein lineares Programm der Form $\max\{c^T x | Ax \leq b, x \geq 0\}$ unbeschränkt ist, dann gibt es einen Index $k = 1, \ldots, n$, so dass das Problem $\max\{c_k x_k | Ax \leq b, x \geq 0\}$ unbeschänkt ist.

Beweisen oder widerlegen Sie auch die Umkehrung dieser Aussage.

(B) Formulieren Sie das Problem $\mathsf{min}\{\mathsf{max}\{c^T x - c_0, d^T x - d_0\} | Ax \leq b, 0 \leq x \leq 1\}$ als lineares Programm. (Dabei sind c_0, $d_0 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.)

(C) Formulieren Sie das Problem $\mathsf{max}\{\mathsf{max}\{c^T x - c_0, d^T x - d_0\} | Ax \leq b, 0 \leq x \leq 1\}$ als gemischt-ganzzahliges Programm. (Dabei sind c_0, $d_0 \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.)

G 13 (A) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: *Ein Polyeder $\mathcal{P}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ hat nur endlich viele Ecken.*

Finden Sie eine obere Schranke $\mu(m, n)$ für die Anzahl der Ecken von $\mathcal{P}(A, b)$ und geben Sie ein Beispiel eines Polyeders an, das genau $\mu(m, n)$ Ecken hat.

(B) Sei $\mathcal{P}(A, b) \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop, und sei x eine Ecke von $\mathcal{P}(A, b)$. x heißt nicht degeneriert, falls $|eq(\{x\})| = n$, anderenfalls heißt x degeneriert.

(a) Zeigen Sie: *Eine nicht degenerierte Ecke ist zu genau n Ecken adjazent.*
(b) Skizzieren Sie ein Polytop, das nur nicht degenerierte Ecken hat, und ein Polytop, das nur degenerierte Ecken hat.

Hausübung

H 10 Bonusaufgabe (5 Punkte)

(A) Als Leiter der IT-Abteilung einer Versicherung ist es Ihre Aufgabe, den Betrieb und die Wartung des Großrechnerzentrums zu gewährleisten. Dazu stehen Ihnen sechs Systemadministratoren (kurz: Admins) zur Verfügung, die auf Stundenbasis beschäftigt werden. Sie sind für deren Einsatzplanung verantwortlich. Von Montag bis Freitag zwischen 8 Uhr morgens und 22 Uhr abends muss gewährleistet sein, dass stets ein Admin im Rechenzentrum arbeitet. Die Admins haben Ihnen folgende Liste gegeben, aus der hervorgeht, wieviele Stunden sie an welchem Wochentag höchstens arbeiten und wieviel sie pro Stunde verdienen.

Name	Lohn/Stunde	Mo	Di	Mi	Do	Fr
K.C.	300,-	6	0	6	0	6
D.H.	210,-	0	6	0	6	0
H.B.	195,-	4	8	4	0	4
S.C.	250,-	5	5	5	0	5
K.S.	220,-	3	0	3	8	0
N.K.	270,-	0	0	0	6	2

Ferner haben die sechs Admins mit Ihrem Vorgänger eine Mindestbeschäftigung ausgehandelt: K.C., D.H., H.B. und S.C. arbeiten mind. 8 Stunden pro Woche, K.S. und N.K. mind. 7 Stunden pro Woche. Da das Budget Ihrer Abteilung knapp bemessen ist, sind Sie an einer kostenminimalen Verteilung der Arbeit interessiert. Formulieren Sie das entsprechende Oprimierungsproblem.

(B) Formulieren Sie das Optimierungsproblem mittels der Modellierungssprache ZIMPL und berechnen Sie die Lösung mittels des MIP-Lösers SCIP.

Abgabe: Die ZIMPL-Datei bitte zu zweit bearbeiten und eine ausgedruckte Kopie der Datei sowie die Lösung abgeben.