Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9./10. November 2006

Einführung in die Optimierung, Übung 3

Gruppenübung

G 8 Das Polyeder $\mathcal{P}(A,b)$ sei durch die folgenden Ungleichungen gegeben:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &\leq 2 \\ -x_1 &\leq 1 \\ -x_2 &\leq 1 \\ -\tfrac{1}{2}x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 &\leq -\tfrac{7}{2} \\ x_1 + 4x_2 &\leq 14 \\ 7x_1 - 3x_2 &\leq 5 \\ x_1 &\leq 3 \end{aligned}$$

(a) Überführen Sie $\mathcal{P}(A,b)$ in ein Polyeder $\mathcal{P}^=(D,d) = \{x \in \mathbb{R}^p : Dx = d, x \geq 0\}$.

(b) Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Seitenflächen von $\mathcal{P}$, und geben Sie jeweils eine gültige Ungleichung an, durch welche die Seitenfläche induziert wird.

(c) Betrachten Sie nun das Polyeder $\mathcal{P}'$, welches aus $\mathcal{P}$ durch Hinzufügen der Ungleichung

$$-5x_1 + \tfrac{5}{2}x_2 \leq -\tfrac{5}{2}$$

entsteht. Bestimmen Sie alle nicht-trivialen Seitenflächen von $\mathcal{P}'$. Welche Ungleichungen sind für die Beschreibung von $\mathcal{P}'$ unwesentlich?

G 9 (A) Welche der folgenden Mengen sind Polyeder? Begünden Sie Ihre Entscheidung.

(a) $\mathcal{M}_1 := \{y_1 a_1 + y_2 a_2 : -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$,

(b) $\mathcal{M}_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, \mathbb{1}^T x = 1, \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1, \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2, \}$, mit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. $\mathbb{1}$ sei der Vektor in $\mathbb{R}^n$, dessen Komponenten alle gleich 1 sind,

(c) $\mathcal{M}_3 := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, x^T y \leq 1$ für alle y mit $\|y\|_2 = 1\}$,

(B) Eine Menge $\mathcal{K}$ heißt Kegel, wenn mit $x \in \mathcal{K}$ auch $\alpha x \in \mathcal{K}$ für jede Zahl $\alpha \geq 0$.

(a) Beweisen oder widerlegen Sie: *Jeder Kegel ist konvex.*

(b) Zeigen Sie: *Ein polyedrischer Kegel der Form $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq 0\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) hat höchstens einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.*

G 10 (A) Betrachten Sie die konvexe Funktion $f(x) = \max\{c^T x + \alpha, d^T x + \beta\}$. Formulieren Sie das Optimierungsproblem

$$\min\{f(x) : Ax = b, x \geq 0\}$$

als lineares Problem (lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen). Dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(B) Zum näherungsweisen Lösen überbestimmter Gleichungssysteme $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, wird oft ein Optimierungsproblem formuliert, in dem das Residuum bezüglich einer gegebenen Norm minimiert werden soll:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm für:

(a) Die Maximumnorm

$$\|v\|_\infty := \max_{i=1\ldots m} |v_i|$$

(b) Die Summennorm

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{m} |v_i|$$

Hausübung

H 7 (5 Punkte)

Ein *Rad* ist ein Graph $W_n = (V, E)$ mit den Knoten $V := \{0, 1, \ldots, n\}$ und den Kanten

$$E := \{\{0, i\} : i = 1, \ldots, n\} \cup \{\{i, i+1\} : i = 1, \ldots, n-1\} \cup \{\{n, 1\}\}.$$

Sei das Polyeder P definiert durch

$$P := \{x \in \mathbb{R}^{|E|} : \sum_{(i,j) \in E} x_{i,j} = 2 \; \forall i \in V, \; 0 \leq x_e \leq 1 \; \forall e \in E\}.$$

(a) Berechnen Sie die Dimension von P.

(b) Beweisen Sie, dass die Ungleichungen $x_e \geq 0$ für alle $e \in E$ redundant sind.

(c) Beweisen Sie, dass die Ungleichungen $x_{0,i} \leq 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ redundant sind.

H 8 (5 Punkte)

(A) Wir definieren den Träger von $x \in \mathbb{R}^n$ als $\operatorname{supp}(x) = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \;:\; x_i \neq 0\}$. Beweisen Sie:
Für $x \in P^{=}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) *x ist eine Ecke von $P^{=}(A, b)$.*

(2) $\operatorname{rang}(A_{\cdot \operatorname{supp}(x)}) \;=\; |\operatorname{supp}(x)|$.

(3) *Die Spaltenvektoren $A_{\cdot j}$, $j \in \operatorname{supp}(x)$, sind linear unabhängig.*

(B) Eine Matrix $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ heißt total unimodular, wenn für jede quadratische Untermatix A' von A (d.h. A' ist durch Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgegangen) gilt:

$$\det(\mathrm{A}') \in \{-1, 0, 1\}.$$

Seien A total unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Beweisen Sie: Ist A total unimodular, dann hat das Polyeder $P^{=}(A, b)$ nur ganzzahlige Ecken.

Lösungshinweis: Verwenden Sie (A) auf einen Eckpunkt x. In $A_{\cdot \operatorname{supp}(x)}$ finden Sie dann eine geeignete quadratische Untermatrix $A_{I \operatorname{supp}(x)}$. Stellen Sie x als Lösung des Gleichungssystem $A_{I \operatorname{supp}(x)} x_I = b_I$ dar. Dieses Gleichungssystem lässt sich mittels der Cramerschen Regel analysieren – was fällt an den dort vorkommenden Determinanten auf?

H 9 (5 Punkte)

(A) Der Hauptausschuss eines Unternehmens plant Ausgaben für das kommende Jahr. Es wurden sieben Projekte aus zwei Abteilungen A und B vorgelegt. Projekte 1, 2, 3 und 4 hat die Abteilung A vorgeschlagen, Projekte 5, 6, und 7 die Abteilung B. Der zu erwartende Aufwand und Gewinn ist bei allen Projekten in etwa gleich hoch, aber bei der Auswahl sind bestimmte Randbedingungen zu beachten. Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem mit linearer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen.

(a) Das Budget reicht nicht für alle Projekte.

(b) Mindestens ein Projekt aus jeder Abteilung muss bewilligt werden.

(c) Projekt 7 kann nur dann gewählt werden, wenn Projekt 1 nicht gewählt wurde.

(d) Projekte 2 und 3 können nicht zusammen bewilligt werden und beide basieren auf Ergebnissen des Projektes 5.

(e) Es muss genau eine der Alternativen gewählt werden: entweder mindestens zwei Projekte aus der Abteilung A oder mindestens zwei Projekte aus der Abteilung B.

(B) Formulieren Sie das Optimierungsproblem mittels der Modellierungssprache ZIMPL und berechnen Sie die Lösungen mittels des MIP-Lösers SCIP. Die Informationen hierzu finden Sie auf der Internetseite der Veranstaltung (s. Informationsblatt).

Abgabe: Bitte die ausgedruckte ZIMPL-Datei sowie die Lösung in Zweiergruppen abgeben.