Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2./3. November 2006

Einführung in die Optimierung, Übung 2

Gruppenübung

G 4 Welche der folgenden Funktionen sind konvex, welche konkav, welche weder konvex noch konkav?

(a) $f(x,y) = xy$,

(b) $f(x,y) = 2xy - x^2 - y^2$,

(c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ auf $\mathbb{R}^2_+$,

(d) jede Norm $\|x\|_p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ auf $\mathbb{R}^n$,

G 5 (A) Der Epigraph $\mathcal{E}(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\mathcal{E}(f) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

Stellen Sie $\mathcal{E}(f)$ für $f(x) = x^2$ grafisch dar und beweisen Sie folgenden Satz: *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt: f ist konvex $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{E}(f)$ ist konvex.*

(B) Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und sei $\alpha > 0$. Zeigen Sie: *Dann sind auch die Funktionen αf_1, $f_1 + f_2$ und $\max[f_1, f_2]$ konvex.*

Finden Sie Gegenbeispiele, die zeigen, dass (für f_1, f_2 konvex) die Funktionen $f_1 - f_2$, $\min[f_1, f_2]$ bzw. $f_1 \cdot f_2$ nicht notwendigerweise konvex sind.

G 6 Formulieren Sie als Optimierungsproblem und untersuchen Sie, ob die Zielfunktion und die zulässige Menge konvex sind:

Ein Käufer möchte 150 000 Stück einer Ware kaufen. Drei Verkäufer legen Angebote vor, die in der folgenden Tabelle beschrieben sind. Es sind jeweils die Fixkosten (sie entstehen unabhängig davon, wie viel gekauft wird) und die Stückpreise in GE angegeben. Diese können je nach gekaufter Menge variieren. Außerdem ist die Lieferkapazität der Verkäufer beschränkt.

Seien x_1, x_2 bzw. x_3 die Stückzahl, die bei Verkäufer 1, 2 bzw. 3 gekauft wird. Ziel ist es, so einzukaufen, dass die Gesamtkosten minimal sind.

Verkäufer	Fixkosten	Stückpreis	Menge
1	3 520.20	51.20	$0 < x_1 \leq 50\,000$
2	82 810.00	52.10	$0 < x_2 \leq 20\,000$
		51.10	$20\,000 < x_2 \leq 60\,000$
		50.10	$60\,000 < x_2 \leq 80\,000$
		49.10	$80\,000 < x_2 \leq 100\,000$
3	0	60.50	$0 < x_3 \leq 50\,000$
		59.00	$50\,000 < x_3 \leq 80\,000$

Die Tabelle ist so zu verstehen, dass beispielsweise für Verkäufer 2 das 20 001ste Stück zu einem günstigeren Preis angeboten wird als die ersten 20 000 Stück.

G 7 Bekanntlich heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin, wenn f die Form $f(x) = a^T x + b$ hat, mit $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) *Eine affine Funktion ist sowohl konvex als auch konkav.*

(b) *Eine Funktion, die sowohl konvex als auch konkav ist, ist affin.*

Hausübung

H 4 (5 Punkte)

(A) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Definitionen:
Definition 1: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für je zwei Punkte $x, y \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f\big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Definition 2: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für beliebige Punkte $x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \geq 0$ mit $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i).$$

(B) Beweisen Sie: *Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Dann gilt:*

$$\max\{f(x) : x \in \mathcal{M}\} = \max\{f(x) : x \in \operatorname{conv}\mathcal{M}\}.$$

H 5 (5 Punkte)

(A) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe, monoton wachsende Funktion ($x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y)$). Sei $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass $h : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(f(x))$ auch konvex ist.
Finden Sie ein Beispiel, das die Notwendigkeit der Voraussetzung zeigt, dass g monoton wachsend ist.

(B) Die (untere) Niveaumenge einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zum Niveau β ist definiert durch

$$\mathcal{L}(f, \beta) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \beta\}$$

Beweisen Sie: *f ist konvex $\Longrightarrow$ $\mathcal{L}(f, \beta)$ ist konvex für jedes $\beta \in \mathbb{R}$.*
Zeigen Sie, dass die Umkehrung nicht gilt.

(C) Beweisen Sie: *Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann ist* argmin(f, $\mathcal{C}$) *d.h. die Menge der Punkte, wo f ihr Minimum über $\mathcal{C}$ annimmt, konvex.*

H 6 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex, und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$f(x) \leq \frac{b - x}{b - a} f(a) + \frac{x - a}{b - a} f(b).$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle $x \in (a, b)$ gilt:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Machen Sie eine Skizze, die diese Ungleichung illustriert.

(c) Sei f differenzierbar. Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$