Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26./27. Oktober 2006

Einführung in die Optimierung, Übung 1

Gruppenübung

G 1 Das Management eines Krankenhauses hat folgenden Bedarf an Krankenpflegern bzw. Krankenschwestern:

Zeit	benötigte Schwestern/Pfleger
0.00 bis 4.00	50
4.00 bis 8.00	60
8.00 bis 12.00	40
12.00 bis 16.00	50
16.00 bis 20.00	30
20.00 bis 24.00	25

Das Pflegepersonal arbeitet in 8-Stunden-Schichten, wobei eine Schicht um 0, 4, 8, 12, 16 oder 20 Uhr beginnt. Es soll ein Dienstplan erstellt werden, der mit der kleinstmöglichen Anzahl an Pflegern bzw. Schwestern auskommt.

Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem. Ist die zulässige Menge konvex?

G 2 Zeigen Sie, dass folgende Mengen konvex sind:

(a) jede Hyperebene $\mathcal{H}$ der Form

$$\mathcal{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha\},$$

wobei $a \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$;

(b) jeder von einer Hyperebene $\mathcal{H}$ erzeugte abgeschlossene Halbraum

$$\mathcal{H}^a = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \alpha\};$$

(c) die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$;

(d) die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems $Ax \leq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ (das Ungleichheitszeichen ist dabei zeilenweise zu verstehen);

(e) jede abgeschlossene Kugel um einen gegebenen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vom Radius $\alpha > 0$

$$\mathcal{B}_\alpha(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq \alpha\}.$$

G 3 Ein Erzeuger von Tierfutter produziert ein Gemisch aus drei Bestandteilen: zwei nährstoffreiche Bestandteile und ein Füllmittel. Ein Kilogramm Futter muss einen Minimalgehalt an Nährstoffen enthalten:

Nährstoff	A	B	C	D
Gramm	90	50	20	2

Die nährstoffreichen Bestandteile setzen sich wie folgt zusammen:

	A	B	C	D	Kosten/kg
Bestandteil 1 in Gramm/kg	100	80	40	10	40
Bestandteil 2 in Gramm/kg	200	150	20	–	60

Das Futtergemisch soll so erzeugt werden, dass die Kosten möglichst gering sind. Formulieren Sie dies als Optimierungsproblem. Skizzieren Sie die zulässige Menge. Ist sie konvex?

Hausübung

H 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie:

(A) *Der Durchschnitt einer beliebigen Familie konvexer Mengen ist wieder eine konvexe Menge.*

(B) *Die konvexe Hülle einer Menge $\mathcal{M}$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus $\mathcal{M}$.*

H 2 (5 Punkte)

(A) Sei $\mathcal{C}$ die konvexe Hülle der vier Punkte $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,1)$, $P_3 = (-1,3)$ und $P_4 = (-2,1)$.

 (I) Beschreiben Sie $\mathcal{C}$ durch lineare Ungleichungen.

 (II) Stellen Sie den Punkt $Q = (-1,2) \in \mathcal{C}$ als Konvexkombination von $P_1, \ldots, P_4$ dar. Wie viele der P_i benötigt man dafür höchstens?

(B) Beschreiben Sie die folgenden Mengen mit Hilfe linearer Ungleichungen:

 (I) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$

 (II) $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1\}$

H 3 (5 Punkte)

Zur Finanzierung eines Großprojekts hat ein Unternehmen zu Beginn des Jahres 2007 in den folgenden sechs Jahren Bedarf an Finanzierungsmitteln, und zwar

24 Mio. für das Jahr 2007,
20 Mio. für das Jahr 2008,
27 Mio. für das Jahr 2009,
29 Mio. für das Jahr 2010,
31 Mio. für das Jahr 2011,
23 Mio. für das Jahr 2012.

Die Mittel will man sich über langfristige Anleihen am Kapitalmarkt besorgen. Anleihen können am 1. Januar jedes Jahres aufgenommen werden und müssen zum 31. Dezember 2012 zurückgezahlt werden, wobei die Verzinsung in der Rückzahlungssumme enthalten ist. Der Rückzahlungskurs für die Anleihen beträgt

aus dem Jahr 2007: 147%,
aus dem Jahr 2008: 139%,
aus dem Jahr 2009: 129%,
aus dem Jahr 2010: 121%,
aus dem Jahr 2011: 113%,
aus dem Jahr 2012: 106%.

Die Operations Research Abteilung steht nun vor der Frage, wie die Volumina der sechs Anleihen aussehen sollen, da es unter Umständen günstig sein kann, Anleihen auf Vorrat aufzunehmen. In jedem Jahr können die nicht benötigten Mittel zu jeweils 5.3% Verzinsung angelegt werden. Formulieren Sie das geschilderte Problem als Optimierungsproblem.