Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Stefan Ulbrich
Dipl.-Math. Christian Brandenburg

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

9. Januar 2007

Einführung in die Optimierung

Mittelseminaraufgabe: Optimierung eines Stabwerks

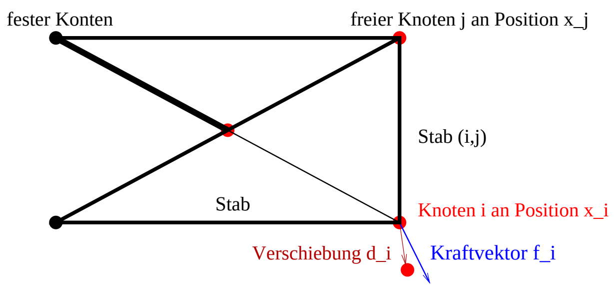
Ein Stabwerk ist eine mechanische Struktur, die aus miteinander verbundenen elastischen Stäben besteht. Typische Beispiele sind Eisenbahnbrücken, Strommasten, der Eiffelturm und viele andere lasttragende Strukturen.

Ziel soll es sein, ein Stabwerk vorgegebenen Gewichts so zu konstruieren, dass es unter einer vorgegebenen Last möglichst wenig nachgibt.

1 Mathematisches Modell

1.1 Das Stabwerk

Wir betrachten folgende Beschreibung eines Stabwerks in 2D:



- $x_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \ldots, m+r\} =: V$, seien Verbindungsknoten im Stabwerk, an denen Stäbe verbunden sind. Die Knoten $x_{m+1}, \ldots, x_{m+r}$ seien fixiert, die übrigen Knoten können sich unter Last verschieben.
- $(i,j) \in E \subset \{(i,j) \in V \times V : \; i < j\}$ seien die Stäbe des Stabwerks, wobei Stab (i,j) die Knoten x_i und x_j verbindet (beachten Sie unsere Konvention, dass immer $i < j$ gilt).
- $v_{ij} \in \mathbb{R}$, $(i,j) \in E$ sei das Volumen des Stabes (i,j), der Knoten x_i mit Knoten x_j verbindet. Stab (i,j) habe die Länge $l_{ij} = \|x_i - x_j\|$ sei also in der Ausgangskonfiguration weder gestreckt noch gestaucht.
- $f_i \in \mathbb{R}^2$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, sei die an Verbindungsknoten x_i angreifende äußere Kraft.

1.2 Elastisches Modell eines Stabes

Betrachte Stab (i,j). Für nicht zu große Kräfte verhält sich ein Stab elastisch: Um den Stab um $\Delta l_{ij} > 0$ zu strecken oder um $\Delta l_{ij} < 0$ zu stauchen muss man am Punkt x_i eine Längskraft

$$F_{ij} = \underbrace{\kappa}_{\text{Elastizitätskonstante}} \underbrace{\frac{\Delta l_{ij}}{l_{ij}}}_{\text{rel. Längenänderung}} \underbrace{\frac{v_{ij}}{l_{ij}}}_{\text{Querschnitt}} \underbrace{\frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}}_{\text{Kraftrichtung}} = \kappa \, v_{ij} \frac{\Delta l_{ij}}{l_{ij}^2} \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|}$$

und analog am Punkt x_j eine Gegenkraft

$$F_{ji} = -F_{ij}$$

anwenden, wobei $\kappa > 0$ eine Elastizitätskonstante, das sog. Young-Modul, des Stabes ist.

a) Begründen Sie: Um die Endpunkte x_i und x_j nach $x_i + d_i$ und $x_j + d_j$ zu verschieben, müssen an den Stabenden $x_i + d_i$ bzw. $x_j + d_j$ die Kräfte F_{ij} bzw. F_{ji}

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \kappa\ v_{ij}\ \frac{\|x_i + d_i - (x_j + d_j)\| - \|x_i - x_j\|}{l_{ij}^2}\ \frac{x_i + d_i - (x_j + d_j)}{\|x_i + d_i - (x_j + d_j)\|}, \\ F_{ji} &= -F_{ij} \end{aligned}$$

angreifen.

b) Zeigen Sie durch Taylorentwicklung, dass gilt

$$F_{ij} = \kappa\ v_{ij}\ \frac{(x_i - x_j)^T (d_i - d_j)}{l_{ij}^4} (x_i - x_j) + O(\|d_i - d_j\|^2).$$

Wir arbeiten im folgenden mit den linearen Approximationen

$$F_{ij} = \kappa v_{ij} \frac{(x_i - x_j)^T (d_i - d_j)}{l_{ij}^4} (x_i - x_j), \quad F_{ji} = -F_{ij}. \tag{1}$$

1.3 Elastisches Modell des Stabwerks

Greifen an den freien Knoten x_i, $1 \leq i \leq m$, äußere Kräfte an, dann verschieben sich die Knoten nach $x_i + d_i$, so dass die Summe der Kräfte in jedem freien Knoten verschwindet, also

$$\sum_{(i,j)\in E} F_{ij} - \sum_{(j,i)\in E} F_{ji} = f_i, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{2}$$

c) Leiten Sie aus (1) und (2) ein lineares Gleichungssystem für die Verschiebungen d_i, $1 \leq i \leq m$, her.

d) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem aus c) in der Form geschrieben werden kann

$$A(v)d = f, \quad A(v) = \sum_{(i,j)\in E} v_{ij} a_{ij} a_{ij}^T, \tag{3}$$

wobei $d = (d_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathbb{R}^{2m}$ der Vektor der Verschiebung, $f = (f_i)_{1\leq i\leq m} \in \mathbb{R}^{2m}$ der Vektor der äußeren Kräfte, und $a_{ij} \in \mathbb{R}^{2m}$ geeignete Vektoren sind. Geben Sie a_{ij} explizit an.

2 Optimierung des Stabwerkes

Die Nachgiebigkeit des Stabwerkes unter der Last $f \in \mathbb{R}^{2m}$ ist definiert durch

$$\text{Nachgiebigkeit} = f^T d,$$

wobei d die Verschiebung des Stabwerks unter der Last f ist, also $A(v)d = f$.

Optimierungsaufgabe:

Bestimme die Stabvolumen $v_{ij} \geq 0$ so, dass unter der gegebenen Last f

- die Nachgiebigkeit minimal,
- das Gesamtvolumen aller Stäbe im Stabwerk $= v_{max}$ ist.

Dies führt auf das Problem

$$\min_{v,d}\ f^T d \quad \text{s.t.} \quad A(v)d = f, \quad \sum_{(i,j)\in E} v_{ij} = v_{max}, \quad v \geq 0. \tag{P}$$

e) Zeigen Sie, dass man die Zielfunktion in (P) äquivalent durch $d^T A(v) d$ ersetzen kann.

2.1 Formulierung als lineares Problem

Wir wollen zeigen, dass (P) äquivalent zu einem linearen Programm ist. Wir gehen dazu in mehreren Schritten vor.

Hinweis: Sie benötigen nur (3) und (P), nicht Ihre Ergebnisse aus a)-d).
Betrachte das (als LP formulierbare) Problem

$$\min_u \quad \|u\|_1 := \sum_{(i,j)\in E} |u_{ij}| \quad \text{s.t.} \quad \sum_{(i,j)\in E} a_{ij}u_{ij} = f. \tag{PL}$$

f) Formulieren Sie (PL) als LP (PL′), indem Sie u_{ij} als Differenz nichtnegativer Variablen schreiben, und zeigen Sie, dass das duale Problem (DL′) von (PL′) geschrieben werden kann als

$$\max_s \quad f^T s \quad \text{s.t.} \quad -1 \le a_{ij}^T s \le 1, \quad (i,j) \in E. \tag{DL}$$

g) Zeigen Sie mit dem Satz vom schwachen komplementären Schlupf (angewendet auf (PL′), (DL′)), dass optimale Lösungen $\bar{u}$ und $\bar{s}$ von (PL) und (DL) erfüllen

$$|\bar{u}_{ij}|\, a_{ij}^T \bar{s} = \bar{u}_{ij}, \quad (i,j) \in E.$$

h) Seien $\bar{u}$ und $\bar{s}$ optimale Lösungen von (PL) und (DL). Zeigen Sie, dass dann $(\bar{v}, \bar{d})$ mit

$$\bar{v}_{ij} := \frac{v_{max}}{\|\bar{u}\|_1}|\bar{u}_{ij}|, \quad \bar{d} := \frac{\|\bar{u}\|_1}{v_{max}}\bar{s}$$

zulässig für (P) ist mit Zielfunktionswert

$$f^T\bar{d} = \frac{\|\bar{u}\|_1^2}{v_{max}}.$$

Tip: Verwenden Sie unter anderem g).

i) Sei umgekehrt (v, d) zulässig für (P). Zeigen Sie, dass dann u mit

$$u_{ij} := v_{ij}(a_{ij}^T d)$$

zulässig für (PL) ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$f^T d = \sum_{v_{ij}>0} \frac{u_{ij}^2}{v_{ij}}$$

und folgern Sie

$$f^T d = \sum_{v_{ij}>0} \frac{u_{ij}^2}{v_{ij}} \overset{\text{darf verwendet werden}}{\ge} \frac{\|u\|_1^2}{v_{max}} \ge \frac{\|\bar{u}\|_1^2}{v_{max}} = f^T\bar{d}.$$

Zusatzaufgabe: Warum gilt die erste Ungleichung (Tip: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)?

j) Wie erhält man also durch Lösen von (PL) die optimalen Stabvolumen $\bar{v}$ für (P)?

3 Numerischer Test

Auf der Vorlesungshomepage können Sie bei den Übungen die Datei `stabwerk.zip` herunterladen. Sie enthält mehrere MATLAB-Dateien, die ein Innere-Punkte-Verfahren für Lineare Optimierungsprobleme implementieren, sowie eine Visualisierungsroutine für Stabwerke:

Der Aufruf

```
x=IPLP(c,B,b)
```

löst das Problem

$$\min c^T x \quad Bx = b, \quad x \geq 0.$$

Ist B eine sparse-Matrix, dann rechnet `IPLP` mit dünnbesetzten Matrizen.

Der Aufruf

```
plottruss(x,E,v)
```

plottet ein Stabwerk mit Knoten x und Stäben E des Volumens v:

- $x = ((x_1)_1, (x_1)_2, (x_2)_1, (x_2)_2, \ldots, (x_{m+r})_1, (x_{m+r})_2)^T$: $2(m+r) \times 1$-Vektor enthält Knoten $x_i = \binom{(x_i)_1}{(x_i)_2}$.
- $E = \begin{pmatrix} i_1 & j_1 \\ \vdots & \vdots \\ i_n & j_n \end{pmatrix}$: $n \times 2$-Array enthält Stäbe (i, j).
- v: $n \times 1$-Vektor enthält Volumina der Stäbe in E.

j) Implementieren Sie (PL$'$) in MATLAB: Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `v=opttruss(x,E,f)`, die zu gegebene Knoten x, Stäben E (Format wie beschrieben) und äußeren Kräften f ($2m \times 1$-Vektor) die Vektoren b, c, B für (PL$'$) aufstellt, das Problem mit `IPLP` löst und aus dem Ergebnis die optimalen Stabvolumen v für (P) berechnet.

   Stellen Sie B als sparse-Matrix auf!!!

k) Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das für folgendes Problem x, E, f aufstellt, das Stabwerk mit Ihrem `opttruss` optimiert und das Ergebnis mit `plottruss` plottet.

   Designproblem: Es soll eine Brücke im Bauraum $[0, 110] \times [0, 20]$ entworfen werden.

   Die freien Knoten seien auf dem Rechteckgitter

$$\begin{pmatrix} 10j \\ 4k \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 10, \quad 0 \leq k \leq 5,$$

   die fixierten Knoten seien

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

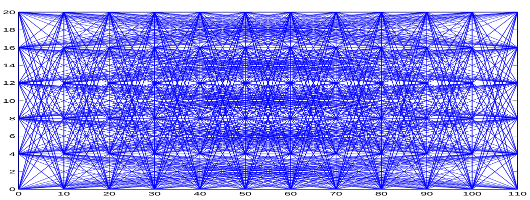
   Somit ist $m = 10 \cdot 6 = 60$, $r = 2$. Wir lassen potentielle Stäbe zwischen allen Knotenpaaren zu, die sich in $x-$ oder $y-$Richtung um höchstens eine Gittermasche unterscheiden, also

$$E = \{(i, j) : \ 1 \leq i < j \leq 62, \ \ |(x_i)_1 - (x_j)_1| \leq 10 \ \text{ oder } \ |(x_i)_2 - (x_j)_2| \leq 4\}.$$

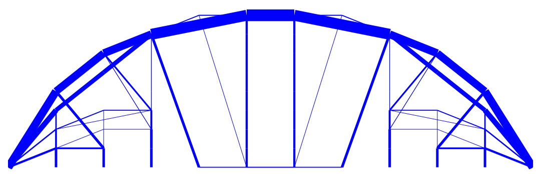
   Die äußeren Kräfte seien

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{in den Knoten} \quad \begin{pmatrix} 10j \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in den restlichen Knoten.}$$

   Ferner sei $v_{max} = 100$ und $\kappa = 1$.



Potentiell mögliche Stäbe


optimiertes Ergebnis eines ähnlichen Problems

Abgabe: Bis 19.01.2007 in der Übung