Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
14.12.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

9. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Test: Welche der folgenden Aussagen sind richtig/falsch?

a) Sei $D \subset \mathbb{C}$, dann ist jede stetige Funktion $f: D \to \mathbb{C}$ *beschränkt*, d.h. es gibt ein $C > 0$, so dass $|f(z)| \leq C$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) Jede monotone Funktion $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.

c) Die Menge der stetigen Funktionen $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum V. Die Abbildung $f \mapsto \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$ eine lineare Abbildung von V nach $\mathbb{R}$.

d) Jede Funktion $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ist stetig.

e) Sei $D = \{m + in \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist die Funktion $f: D \to \mathbb{C}$, $z \mapsto 5z + 4 + 3i$ ist stetig und besitzt auf $f(D)$ eine Umkehrfunktion.

f) Es sei $a > 0$ und $z \in \mathbb{C}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist gleich a^z?

   a) ☐ $\exp(-z \log(1/a))$,

   c) ☐ $1/\exp(1/z \cdot \log(1/a))$,

   b) ☐ $1/\exp(-z \log a)$,

   d) ☐ $\exp(-z \log(-a))$,

   e) ☐ $\exp(z \log(a/2)) \exp(z \log 2)$,

   f) ☐ $\exp(z/2 \cdot \log a) \exp(z \log 2)$,

Aufgabe 2 – Veranschaulichung komplexer Funktionen:

Sei $D := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1,\ 0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1\}$ eine Teilmenge der komplexen Ebene. Skizzieren Sie das Bild von D unter den Abbildungen z^2, z^3 und $\frac{1}{z}$.

Aufgabe 3 – Umgestelltes ε-δ-Kriterium:

Sei $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Versuchen Sie die folgenden Aussagen zuerst zu verstehen. Geben Sie dann Funktionen f, g an, sodass f die Bedingung erfüllt und g nicht.

a) Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $\delta > 0$ und alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt.

b) Für jedes $\varepsilon > 0$ und für alle $\delta > 0$ gilt $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - a| < \delta$.

c) Für jedes $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt.

Aufgabe 4 – Fixpunkte stetiger Funktionen:

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann heißt $z_0 \in \mathbb{C}$ ein *Fixpunkt* von f, wenn $f(z_0) = z_0$ ist.

a) Geben Sie eine Funktion $f: (0, 1) \to (0, 1)$ an, die keinen Fixpunkt besitzt.

b) Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a, b]) \subset [a, b]$. Zeigen Sie: f hat einen *Fixpunkt* $x_0 \in [a, b]$, d.h. $f(x_0) = x_0$.

   Hinweis: *Betrachten Sie die Hilfsfunktion* $h(x) = f(x) - x$.