



8. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Stetigkeit und ϵ - δ -Kriterium:

- a) Zeigen Sie mit dem ϵ - δ -Kriterium, dass die folgende Funktion stetig ist.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto 7x + 5$$

- b) Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{falls } x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie mit ϵ - δ -Kriterium: f ist unstetig in 0.

Aufgabe 2 – Stetigkeit:

- a) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die an allen rationalen Stellen verschwindet.
Zeigen Sie: f ist identisch Null.
Hinweis: Benutzen Sie das in Tutorium 5 Aufgabe 3 d) bewiesene Resultat.
- b) Seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die an allen rationalen Stellen übereinstimmen.
Zeigen Sie: f und g sind identisch.
- c) Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

An welchen Stellen ist f stetig?

- d) * Untersuchen Sie, in welchen Punkten die folgende Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ wobei } p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{N} \text{ und teilerfremd,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3 – Zwischenwertsatz:

Michael und Michaela stehen vor dem folgenden fundamentalen Problem. Sie haben geradezu phänomenalen Appetit, aber, ungerecht wie das Leben sein kann, nur eine einzige Brötchenhälfte, die mit Nutella bestrichen ist.

Die Brötchenhälfte ist kreisrund, aber das Nutella ist ungleichmäßig verteilt. Da sie nun beide Dickschädel sind, droht Streit.

Als Mathematiker werden Sie gefragt, ob es möglich ist, ein interfamiliäres Drama zu vermeiden, indem Sie mittels eines geraden Schnittes durch die Mitte die Brötchenhälfte so halbieren, dass auf beiden Seiten gleich viel Nutella vorhanden ist. Geben Sie gegebenenfalls ein Verfahren an, um einen gerechten Schnitt zu finden.

Dazu nehmen Sie an, dass die Menge des Nutellas auf einer Seite des Schnittes stetig von der Richtung des Schnittes abhängt.

Hinweis: Wie hängt die Nutellamenge zu einer Seite des Schnitts vom Winkel ab?

Gottfried Wilhelm Leibniz (* 1.6. 1646 in Leipzig; † 14.12. 1716 in Hannover)

Als Jurist, Naturwissenschaftler, Politiker, Philosoph, Historiker, Theologe und Diplomat konnte Leibniz über sich selbst sagen: “ Beim Erwachen hatte ich schon so viele Einfälle, dass der Tag nicht ausreichte, um sie niederzuschreiben.” Er wuchs in die Zeit der Aufklärung hinein und wird oft als letzter Universalgelehrter bezeichnet.

Nach dem Besuch der Nicolaischule in Leipzig studierte er an den Universitäten Leipzig und Jena Philosophie und Jurisprudenz. 1667 erwarb er an der Universität Altdorf den juristischen Doktorgrad. Das Angebot, eine Professur zu übernehmen, schlug er aus. Im Bestreben, nicht nur theoretisch zu arbeiten, sondern praktische Wirksamkeit zu entfalten (sein Wahlspruch war: *Theoria cum praxi*), wählte er die Stellung eines fürstlichen Beraters, die im Zeitalter des Absolutismus am ehesten die Möglichkeit politischer Einflussnahme bot. Er trat zunächst in den Dienst des Mainzer Kurfürsten Johann Philipp von Schönborn. 1672 gelangte er in diplomatischer Mission nach Paris, wo er vier prägende Jahre verbrachte; erst hier konnte er die Grenzen der zeitgenössischen deutschen Universitätsausbildung überschreiten und den neuesten Stand der Wissenschaften kennen lernen.

Dort unterbreitete er dem “Sonnenkönig” Ludwig XIV. einen Plan für einen kreuzzugsähnlichen Eroberungsfeldzug gegen Ägypten, um ihn von den geplanten Eroberungskriegen in Europa abzubringen. Der König lehnte diesen Plan ab; über hundert Jahre später jedoch setzte Napoleon Bonaparte ihn um. Auch in den Jahren 1672 bis 1676 entdeckte Leibniz während seines Parisaufenthaltes die Grundlagen der Infinitesimalrechnung. Diese baute er in den folgenden Jahren weiter aus. Der englische Naturwissenschaftler Sir Isaac Newton, als dessen wichtigster Gegenspieler Leibniz gilt, hatte sein Prinzip der Infinitesimalrechnung bereits 1666 entwickelt, jedoch nicht veröffentlicht. Leibniz veröffentlichte sein System 1684, woraufhin Newton 1687 folgte, doch setzte sich das Leibnizsche Zeichensystem durch. Leibniz wurde später von Anhängern Newtons angegriffen, er habe die Ideen von Newton aus einem Briefwechsel der beiden von 1676 gestohlen. Dies führte zu einer Plagiatsklage, die 1712 von einer Kommission der Royal Society of London untersucht wurde. Die Kommission, von Newton beeinflusst, sprach Leibniz fälschlicherweise schuldig.

1672/73 vollendete Leibniz Arbeiten an einer Rechenmaschine für die vier Grundrechenarten und wurde Mitglied der Londoner “Royal Society”. 1676 wurde er Hofrat und Hofbibliothekar in Hannover und 1691 auch Bibliothekar der Herzog-August-Bibliothek in Wolfenbüttel. Ab 1685 reiste Leibniz im Auftrag des Welfenhauses durch Europa, um eine Geschichte der Welfen zu schreiben. Dadurch hatte er 1688 die Gelegenheit zu einer Audienz bei Kaiser Leopold I. in Wien. Dabei trug Leibniz seine Pläne für eine Münzreform, zum Geld-, Handels- und Manufakturwesen, zu der Finanzierung der Eroberungskriege gegen die Türken, zum Aufbau eines Reichsarchives und vieles andere vor. Doch es wurde ihm nur wohlwollende Aufmerksamkeit zuteil.

In den neunziger Jahren zog eine Folge von mathematischen Wettstreiten die Aufmerksamkeit der Gelehrten auf sich. Leibniz, Jacob Bernoulli, Vincenzo Viviani, Johann Bernoulli u.a. stellten berühmt gewordene Preisfragen, um an ihnen die Überlegenheit ihrer mathematischen Methoden nachzuweisen.

Der Gelehrte wurde trotz seiner vielseitigen Begabungen von Minderwertigkeitskomplexen geplagt und war nicht in der Lage, seine wissenschaftlichen Errungenschaften in bare Münze zu verwandeln. Sein sächsischer Akzent und ein offenkundiger Sprachfehler schwächten sein Selbstvertrauen. Dazu kamen ungünstige Körpermaße, die seine Hände und Füße zu lang und zu dünn erschienen ließen. In den letzten Lebensjahren litt Leibniz an der Gicht. Er starb am 14. November 1716 in Hannover und wurde dort in der Neustädter Hof- und Stadtkirche St. Johannis beigesetzt.

Quelle: Wikipedia; Leibniz Bibliothek Hannover