Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
29.11.2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Eulersche Zahl:

a) Zeigen Sie: $\exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) Finden Sie eine rationale Zahl q, so dass $|e - q| < 0.001$.
Hinweis: Benutzen Sie den Satz über die Restglied-Abschätzung.

Aufgabe 2 – Absolute Konvergenz:

a) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe komplexer Zahlen und der Grenzwert

$$a := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

existiert. Zeigen Sie: Gilt $a < 1$, so konvergiert die Reihe absolut.

b) Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen absolut konvergieren.

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.1}$$

$$\sin(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \tag{3.2}$$

$$\cos(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \tag{3.3}$$

Aufgabe 3 – Potenzreihe:

a) Zeigen Sie die Konvergenz der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 \cdots, \quad |z| < 1. \tag{2.1}$$

b) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = 1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \cdots, \quad |z| < 1. \tag{2.2}$$

Bemerkung: Durch Differenzieren, welches in einer späteren Vorlesung systematisch behandelt werden wird, folgt die Gleichung (2.1) direkt aus der Gleichung (2.2).

Aufgabe 4 – Cauchyscher Verdichtungssatz:

a) Beweisen Sie:
Satz: Sind die Glieder einer Reihe nichtnegativ und ist (a_n) monoton fallend, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn die *verdichtete Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

b) Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der harmonischen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ mit der verdichteten Reihe.

c) Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$$