Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
22.11.2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

6. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Test:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig/falsch?

1. Es gilt $0,999\ldots = 1$.
2. Gilt $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
3. Jede monotone Folge ist eine Cauchy-Folge.
4. Jede beschränkte Folge ist eine Cauchy-Folge.
5. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
6. Jede divergente Folge hat eine konvergente Teilfolge.
7. Jede Folge die eine konvergente Teilfolge hat, konvergiert.

b) Tragen Sie Implikationspfeile $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$ zwischen den Feldern ein:

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ genügt Quotientenkriterium}}$ $\boxed{\text{Die Partialsummen } \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \text{ sind beschränkt}}$

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut}}$ $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}}$ $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0}$

$\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ konvergiert}}$ $\boxed{\sum\limits_{k=n}^{m} a_k \to 0 \text{ für } n,m \to \infty}$

c) Prüfen Sie den folgenden Beweis.

Behauptung: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ konvergiert.

Beweis: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ konvergiert. Dann gilt:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0+0+0+\ldots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 1-1+1-1+1-\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

q.e.d.

Aufgabe 2 – Konvergenz von Reihen:

Überprüfen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ auf Konvergenz für:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n}{7n^2 + 3n + 1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{i^n}{n}$$

Hinweis: Eine Reihe komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sowohl ihr Realteil als auch Imaginärteil konvergiert.

Aufgabe 3 – Umordnung von Reihen:

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \tag{$*$}$$

a) Zeigen Sie: Diese Reihe konvergiert.

b) Mit a bezeichnen wir den Grenzwert der angegebenen Reihe. Wir definieren eine neue Reihe indem wir die Reihe $(*)$ so umordnen, dass auf zwei positive Werte stets ein negative folgt:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Zeigen Sie, dass diese neue Reihe gegen $\frac{3}{2}a$ konvergiert.
Hinweis: *Betrachten Sie die Folgen der Partialsummen, bei Konstruktion der Umordnung wird Proposition3 aus Kap.2 von Nutzen sein.*

c) Geben Sie eine Umordnung der Reihe an, die divergiert.
Hinweis: *Versuchen Sie das Argument aus der Vorlesung für die harmonische Reihe zu übertragen.*