



## 6. Tutorium zu Analysis I

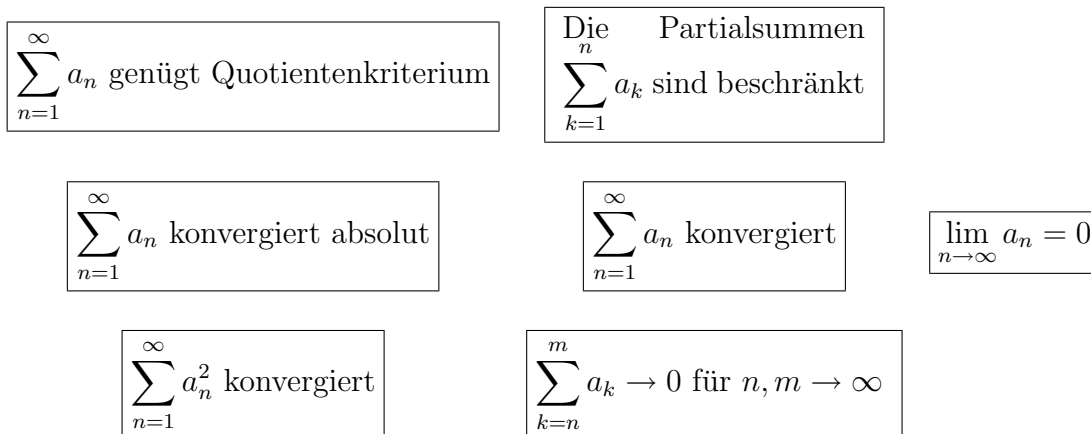
### Aufgabe 1 – Test:

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge komplexer Zahlen.

a) Welche der folgenden Aussagen sind richtig/falsch?

1. Es gilt  $0,999\dots = 1$ .
2. Gilt  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , dann konvergiert die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
3. Jede monotone Folge ist eine Cauchy-Folge.
4. Jede beschränkte Folge ist eine Cauchy-Folge.
5. Jede Cauchy-Folge ist beschränkt.
6. Jede divergente Folge hat eine konvergente Teilfolge.
7. Jede Folge die eine konvergente Teilfolge hat, konvergiert.

b) Tragen Sie Implikationspfeile  $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$  zwischen den Feldern ein:



c) Prüfen Sie den folgenden Beweis.

Behauptung:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$  konvergiert.

**Beweis:** Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit  $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$  konvergiert. Dann gilt:

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0+0+0+\dots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots = 1-1+1-1+1-\dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$$

q.e.d.

**Aufgabe 2 – Konvergenz von Reihen:**

Überprüfen Sie die Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  auf Konvergenz für:

$$a_n = \frac{n^2 + 2n}{7n^2 + 3n + 1} \quad \text{und} \quad b_n = \frac{i^n}{n}$$

*Hinweis:* Eine Reihe komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sowohl ihr Realteil als auch Imaginärteil konvergiert.

**Aufgabe 3 – Umordnung von Reihen:**

Gegeben sei die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \quad (*)$$

- a) Zeigen Sie: Diese Reihe konvergiert.  
b) Mit  $a$  bezeichnen wir den Grenzwert der angegebenen Reihe. Wir definieren eine neue Reihe indem wir die Reihe (\*) so umordnen, dass auf zwei positive Werte stets ein negative folgt:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

Zeigen Sie, dass diese neue Reihe gegen  $\frac{3}{2}a$  konvergiert.

**Hinweis:** Betrachten Sie die Folgen der Partialsummen, bei Konstruktion der Umordnung wird Proposition 3 aus Kap. 2 von Nutzen sein.

- c) Geben Sie eine Umordnung der Reihe an, die divergiert.

**Hinweis:** Versuchen Sie das Argument aus der Vorlesung für die harmonische Reihe zu übertragen.