Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
15.11.2006

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Doppelfolge:

Sei $a_{n,m} := \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{m}\right)^n + (1+\frac{1}{m})(1-\frac{1}{n})^m$ für $n, m \in \mathbb{N}$.

a) Geben Sie die ersten drei Glieder folgender Folgen an:

$$(a_{2,m})_{m\in\mathbb{N}} \quad , \quad (a_{n,3})_{n\in\mathbb{N}}$$

b) Berechnen Sie für beliebige $n \in \mathbb{N}$

$$c_n := \lim_{m\to\infty} a_{n,m}$$

und für beliebige $m \in \mathbb{N}$

$$d_m := \lim_{n\to\infty} a_{n,m}$$

c) Berechnen Sie die Grenzwerte von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
Gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{m\to\infty} a_{m,n}\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty} a_{m,n}\right)$$

so dass man die Reihenfolge der beiden Grenzwerte vertauschen kann?

Aufgabe 2 – Äquivalenzrelationen:

Eine **Äquivalenzrelation** auf einer Menge M ist eine Relation $\sim$, die zwischen gewissen Elementen von M besteht. Von einer Äquivalenzrelation werden die folgenden Bedingungen verlangt:

- Reflexivität: Für jedes $a \in M$ ist $a \sim a$.
- Symmetrie: Für alle $a, b \in M$, für die $a \sim b$ gilt, ist auch $b \sim a$.
- Transitivität: Ist $a \sim b$ und $b \sim c$, dann ist auch $a \sim c$.

Zeigen Sie: Die Relation $\sim$ aus der Vorlesung Abs. 2.4 auf der Menge der rationalen Cauchy-Folgen ist eine Äquivalenzrelation.

Bemerkung: Formal gesehen ist eine Relation auf einer Menge M dasselbe wie eine Teilmenge R der Menge $M \times M$ der Paare von Elementen, nämlich die Teilmenge der Paare (a, b), für die $a \sim b$ gilt, d.h. $(a, b) \in R$.

Aufgabe 3 – Folgen:

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die periodische Folge: $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \ldots$

a) Geben Sie eine Teilfolge von (a_n) an, die gegen 3 konvergiert.

b) Charakterisieren Sie sämtliche Teilfolgen, die gegen 3 konvergieren.

c) Geben Sie eine Folge natürlicher Zahlen an, die für jede natürliche Zahl m eine gegen m konvergente Teilfolge besitzt.

d) Ist r eine beliebige reelle Zahl, so gibt es eine Folge paarweise verschiedener rationaler Zahlen $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen r konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst:
Satz: Zu zwei reellen Zahlen $x < y \in \mathbb{R}$ gibt eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$.
Tipp: Benutzen Sie den Achimedes-Axiom um den Satz zu beweisen.
Wenden Sie diesen Satz auf disjunkte Intervalle an.

e) Sei $(a_n)_{n\in N}$ eine beliebige Abzählung der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie mithilfe d), daß es für jede reelle Zahl r eine gegen r konvergente Teilfolge von $(a_n)_{n\in N}$ gibt.

Habe nun, ach! Philosophie,
Juristerei und Medizin,
Und leider auch Theologie
Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.
Da steh ich nun, ich armer Tor!
Und bin so klug als wie zuvor;
Heiße Magister, heiße Doktor gar
Und ziehe schon an die zehen Jahr
Herauf, herab und quer und krumm
Meine Schüler an der Nase herum-
Und sehe, da wir nichts wissen können!
...
Drum hab ich mich der Magie ergeben,
Ob mir durch Geistes Kraft und Mund
Nicht manch Geheimnis würde kund;
Daß ich nicht mehr mit saurem Schweiß
Zu sagen brauche, was ich nicht weiß;
Da ich erkenne, was die Welt
Im Innersten zusammenhält,
Schau alle Wirkenskraft und Samen,
Und tu nicht mehr in Worten kramen.

Goethe : Faust I