Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
08.11.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

4. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Konvergenz von Folgen:

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

1. Jede konvergente Folge ist beschränkt.
2. Jede beschränkte Folge konvergiert.
3. Es gibt Folgen, die zugleich konvergieren und divergieren.
4. Jede divergente Folge ist unbeschränkt.
5. Jede konvergente Folge hat ein maximales Element.
6. Jede nach oben beschränkte Folge hat ein maximales Element.
7. Ist $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so ist auch $a > 0$.
8. $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = i \cdot i = -1.$

Aufgabe 2 – Quantoren:

a) Beweisen Sie:
Sei $z \in \mathbb{C}$ und $\forall \delta > 0 : |z| < \delta$, dann ist $z = 0$.

b) Was bedeuten die folgende Aussagen :

1. $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N.$
2. $\exists\, N \in \mathbb{N}\ \ \forall \varepsilon > 0 : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall\, n > N.$

Aufgabe 3 – Konvergenz von Folgen:

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$:

a) $a_n = (1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})(1 - \frac{1}{16}) \dots (1 - \frac{1}{n^2})$.
b) $a_n = n \cdot (\frac{1}{2})^n$.
c) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Aufgabe 4 – Babylonischer Algorithmus:

Seien $a > 1$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch:

$$x_0 = a, \;\; x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \quad n \in \mathbb{N}_0$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$ konvergiert.

Tipp: Zeigen Sie zuerst $x_n^2 \geq a$ und dann $x_n \geq x_{n+1} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.