Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
01.11.2006

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Dreiecks-Ungleichung in $\mathbb{C}$:

Sei $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = x + iy$, $w = u + iv$.

a) Zeigen Sie: $|z + w| \leq |z| + |w|$.

b) Zeigen Sie: $\big||z| - |w|\big| \leq |z \pm w| \leq \big||z| + |w|\big|$

Aufgabe 2 – Maximum/Minimum von endlichen Mengen in $\mathbb{R}$:

Sei $M = \{x, y\} \subset \mathbb{R}$ eine zweielementige Menge. In der Vorlesung haben wir das Maximum definiert (siehe Skript Def. (13)).

a) Zeigen Sie: $\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(x + y + |y - x|)$.

b) Geben Sie für das Minimum eine analoge Definition wie (13) und einen analogen Ausdruck wie unter a) an.

c) Was ist $-\max\{-x, -y\}$?

d) Geben Sie die rekursive Definition des Minimums einer beliebigen n-elementigen Menge an (Vgl. Skript Seite 12).

Aufgabe 3 – Supremum/Infimum, Vollständigkeit von $\mathbb{R}$:

a) Finden Sie eine Menge $M \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaften:

$$0 \in M,\ 1 \notin M,\ \inf M = 0 \text{ und } \sup M = 1$$

b) Bestimmen Sie das sup/inf und das max/min der Menge $\{\sqrt{3 + a_n} \mid a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

c) Geben Sie eine Familie $\{(I_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ von verschachtelten Intervallen $I_n := (a_n, b_n)$ an, die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \emptyset$$

Bemerkung: Dabei heißt die Intervallfolge *verschachtelt*, wenn $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (Man sagt auch *Intervall Einschachtelung*)

Aufgabe 4 – Total geordnete Mengen:

Zeigen Sie: $\mathbb{F}_2$ und $\mathbb{C}$ sind nicht total geordnet.
Tipp: Für $\mathbb{C}$ betrachten Sie i und 1. Durch Fallentscheidung führt man zu Widerspruch.