Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
07.02.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

15. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Test:

- Ergänzen Sie folgende Tabelle:

Komplexe Funktion	**Geometrische Beschreibung**
$z \mapsto \overline{z}$	
	Drehung um $\frac{\pi}{2}$ um Ursprung
$z \mapsto -z$	
	Spiegelung an der y-Achse
$z \mapsto \operatorname{Re} z$	
	Translation um $z_1 = a + ib$
$\operatorname{Re} z = x_0,\ -\pi < \operatorname{Im} z < \pi,\ z \mapsto \exp(z)$	

- Die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist
  - konvergent auf ....
  - absolut konvergent auf ....
  - gleichmäßig konvergent auf ....
- Die komplexe Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ist
  - konvergent auf ....
  - absolut konvergent auf ....
  - gleichmäßig konvergent auf ....
- Seien $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{C}$, platzieren Sie die Implikationspfeile ($\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) dorthin, wo es möglich ist. NICHT Raten!

$\boxed{f_n \text{ stetig} \Rightarrow f \text{ stetig.}}$

$\boxed{f_n \to f \text{ punktweise.}}$ $\boxed{f_n \to f \text{ gleichmäßig.}}$ $\boxed{f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)}$

$\boxed{\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx}$

Aufgabe 2 – Konvergenzradius von Potenzreihen:

Bestimmen Sie den Konvergenzradius folgender Potenzreihen

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^n} \qquad\qquad (2)\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} z^n$$

Aufgabe 3 – Konvergenz von Funktionenreihen:

Sind die folgende Aussagen richtig? Bestätigen Sie ihre Vermutungen durch Beispiele.

Es gibt ein Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$,

- die gleichmäßig und absolut konvergiert.
- die gleichmäßig aber nicht absolut konvergiert.
- die absolut aber nicht gleichmäßig konvergiert.
- die weder absolut noch gleichmäßig konvergiert.

Aufgabe 4 – Potenzreihen:

a) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{z-1}{z+1}, \quad |z| < 1$$

in eine Potenzreihe.

b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine 1-Euro Münze in 1, 2, 5, 10, 20, 50 Cent zu wechseln? Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^2} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \frac{1}{1-z^{10}} \cdot \frac{1}{1-z^{20}} \cdot \frac{1}{1-z^{50}}$$

auf $|z| < 1$ in eine Potenzreihe. Warum ist der Koeffizient a_{100} der Potenreihe die Antwort auf die Frage?