Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
31.01.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Test:

- Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Vervollständigen Sie folgende Aussage:

$$\int_a^b f'(x)dx = \qquad\qquad \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt =$$

- Seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ integrierbare Funktionen und $a < b$. Welche der folgenden Gleichheiten sind richtig?

	richtig	falsch
$\alpha \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \alpha f(x)dx$	☐	☐
$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) + g(x)dx$	☐	☐
$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x) \cdot g(x)dx$	☐	☐

- Seien $f\colon D \to \mathbb{C}$ stetig, $\varphi\colon [a,b] \to [\alpha,\beta] \subseteq D$ bijektiv und stetig differenzierbar. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

	richtig	falsch
$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$	☐	☐
$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx$	☐	☐
$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$	☐	☐
$\int_a^b f(\varphi'(t))\varphi(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$	☐	☐

- Ergänzen Sie folgende Tabelle, dabei sei $f(z)$ komplexe Funktion und $f(x)$ reelle Funktion.

f	f'	gilt für
x^a		
	x^a	
$\cos z$		
$\sin z$		
	e^z	$\forall z \in \mathbb{C}$

f	f'	gilt für
	$\frac{1}{x}$	
$\frac{1}{z}$		$z \neq 0$
$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$		
$\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$		
$\arctan x$		

Aufgabe 2 – Gleichmäßige Konvergenz:

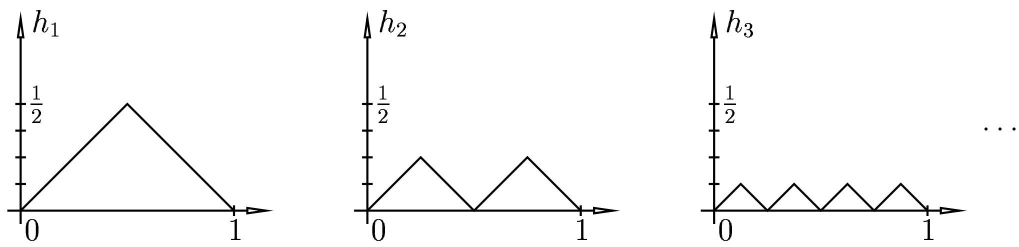
a) Sei $f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen. Welche der folgenden Bedingungen bedeutet punktweise Konvergenz und welche bedeutet gleichmäßige Konvergenz?

- $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; \forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$
- $\forall z \in D \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N : |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$

Sind die punktweise Konvergenz und die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge äquivalent?

b) Überprüfen Sie die folgenden drei Funktionenfolgen auf gleichmäßige Konvergenz:

$$\begin{aligned} f_n &: (0,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \frac{1}{nx} \\ g_n &: [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \mapsto \left(\frac{1}{n}x\right)^2 \end{aligned}$$



Aufgabe 3 – Integralrechnung:

Sei $f : [-a, a] \to \mathbb{C}$ eine integrierbare Funktion. Zeigen Sie:

a) Wenn f *ungerade* ist, d.h. $f(x) = -f(-x) \; \forall x \in [-a, a]$, dann gilt $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$

b) Wenn f *gerade* ist, d.h. $f(x) = f(-x) \; \forall x \in [-a, a]$, dann gilt $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$

Aufgabe 4 – Cauchy-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz:

Satz: Eine Funktionenfolge $f_n\colon D \to \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gleichmäßig, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}\colon \forall n, m > N\colon ||f_n - f_m||_D < \varepsilon.$$

a) Zeigen Sie, dass eine Funktionenfolge $f_n \to f$ genau dann gleichmäßig konvergiert, wenn $||f_n - f||_D \to 0$.

b) Konvergiert eine Funktionenfolge gleichmäßig, so ist (f_n) eine Cauchy-Folge bzgl. der Supremumsnorm $||\cdot||_D$. Beweisen Sie diese Aussage.

c) Ist f_n eine Cauchy-Folge bzgl. $||\cdot||_D$, so konvergiert f_n gleichmäßig gegen eine Funktion f.