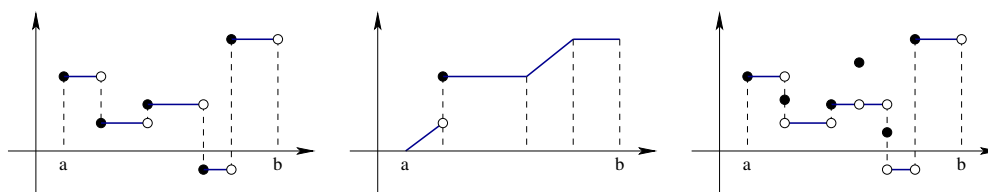




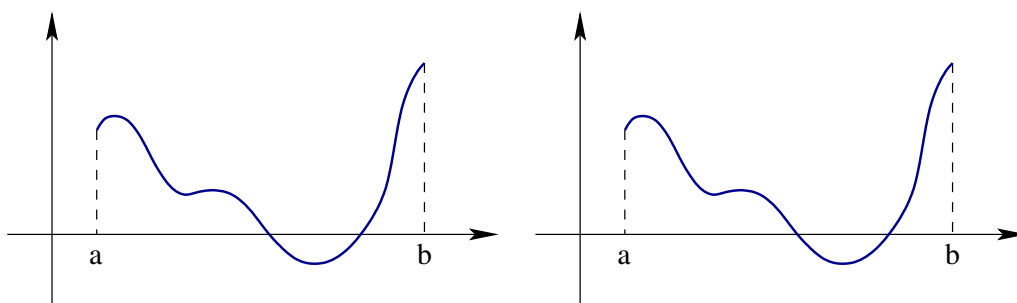
13. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Test:

1. Welche der folgenden Graphen stellt eine Treppenfunktion dar?



2. Eine Funktion sei durch folgenden Graphen gegeben. Der linke und der rechte Graph sind identisch. Wählen Sie eine Partition X zu dem Intervall $[a, b]$. Skizzieren Sie eine untere Treppenfunktion zu dem linken Graphen, eine obere Treppenfunktion zu dem rechten Graphen.



3. Gegeben sei eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Ergänzen Sie das folgende Diagramm durch Implikationspfeile (\Leftarrow , \Rightarrow , \Leftrightarrow) in vertikaler und horizontaler Richtung. NICHT raten! – Platzieren Sie die Pfeile mit Begründung und Beispiel bzw. Gegenbeispiel.

f ist gleichmäßig stetig

f ist Lipschitz-stetig

f ist stetig

f ist beschränkt

f ist integrierbar

f ist differenzierbar

4. Skizzieren Sie den Graphen einer unstetigen Funktion f , für die die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung nicht zutrifft.

Aufgabe 2 – Integralrechnung:

Sei $f: I := [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion und es existiere $M := \sup_I |f|$. Wir definieren die Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

Zeigen Sie, F ist Lipschitz-stetig, d.h.

$$|F(y) - F(x)| \leq M|y - x| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Aufgabe 3 – Differenzierbarkeit und gleichmäßige Stetigkeit:

- Zeigen Sie: Eine Lipschitz-stetige Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig.
- Zeigen Sie: Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ ist gleichmäßig stetig jedoch nicht Lipschitz-stetig. Dieses Beispiel deutet an, dass a) nicht in umgekehrter Richtung gilt.
- Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Zeigen Sie: f ist gleichmäßig stetig.
- Gilt c) auch in umgekehrter Richtung?
- Überprüfen Sie die folgenden auf \mathbb{R} definierten Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$g(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$