Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Yong He
10.01.2007

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. Tutorium zu Analysis I

Aufgabe 1 – Test:

Finden Sie die Fehler in den folgenden mathematischen Argumenten.

a)

$$1 = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} n \cdot 0 = 0.$$

b)

$$\infty = \sum_{1}^{\infty} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-n) + (n+1) \overset{Teleskopsumme}{=} -1$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

d) Die Signumfunktion $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist unstetig in 0, denn für $\delta = 1$ und alle $\varepsilon < 1$ gilt: $\frac{\delta}{2} \in (-\delta, \delta)$ mit $|\operatorname{sgn}(\frac{\delta}{2}) - \operatorname{sgn}(0)| = 1 \not< \varepsilon$.

Aufgabe 2 – Differenzierbare Funktionen:

Bestimmen Sie die Ableitung der Funktionen $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(z) = 2z^3 - 5z - 3\cos z + \sin\frac{\pi}{8}, \quad g(z) = z^3 \exp z, \quad h(x) = \frac{x^2 + \cos x}{2 + x^2}$$

Aufgabe 3 – Differenzierbare Funktionen:

a) Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitze die Einschließung:

$$a + bx - cx^2 \le f(x) \le a + bx + cx^2$$

Zeigen Sie, dass f an der Stelle $x = 0$ differenzierbar ist und dass $f'(0) = b$.

b) Wenden Sie a) auf die folgende Funktion in Punkt $x = 0$ an:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

c) Zeigen Sie, daß die Funktion f aus b) für $x \neq 0$ nicht stetig ist.

Aufgabe 4 – Exponentialabbildung für Matrizen:

Die Exponentialabbildung einer komplexen $n \times n$ Matrix A erhält man, indem man A in die Potenzreihe der Exponentialfunktion einsetzt:

$$e^A = \exp(A) = E + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

Wir definieren die Norm einer $n \times n$ Matrix A als das Maximum der Absolutbeträge der Matrixeinträge,

$$||A|| := \max_{i,j} |a_{ij}|.$$

a) Seien $A_1, A_2, \dots A_n \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zeigen Sie $\|A_1 + \dots + A_n\| \leq \|A_1\| + \dots \|A_n\|$.

b) Zeigen Sie: $||AB|| \leq n||A|| \cdot ||B||$ und $||A^k|| \leq n^{k-1}||A||^k$.

c) Folgern Sie aus b), dass $\exp A$ für alle $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ konvergent ist.