Fachbereich Mathematik
Prof. K. Große-Brauckmann
Lisa Steiner
01.02.2007

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

14. Übung zu Analysis I

Aufgabe 62 – Konvergenz von Funktionenfolgen:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $D := D(f_n) = [0,1]$ durch die Zuordnungsvorschrift

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - 2^n x & \text{, falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ 0 & \text{, falls } \frac{1}{2^n} < x \leq 1 \end{cases}$$

erklärt. Skizziere f_1 und f_2 sowie qualitativ f_n und untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hinsichtlich punktweiser und gleichmäßiger Konvergenz auf D.

Aufgabe 63 – gleichmäßige Konvergenz und gleichmäßige Stetigkeit:

Sei $(f_n\colon D \to \mathbb{C})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, die gleichmäßig gegen $f\colon D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Weiterhin, sei $f_n(D) \subset D'$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und sei $g\colon D' \to \mathbb{C}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Zeige, daß $g \circ f_n$ gleichmäßig gegen $g \circ f$ konvergiert.

Aufgabe 64 – Punktweise und gleichmäßige Konvergenz:

Bestimme für die Funktionenfolgen $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils den Grenzwert bezüglich punktweiser Konvergenz und entscheide, ob sie gleichmäßig konvergieren:

$$f_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{k}}$$

$$g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} x^j.$$

Aufgabe 65 – Funktionenfolge:

Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n = \frac{2x}{n} \mathrm{e}^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0,1].$$

1. Untersuche $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

2. Bestimme
$$I_1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
und vergleiche die Ergebnisse. Gibt es dafür eine theoretische Erklärung?

Aufgabe 66 – Konvergenz von Reihen:

a) Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$A(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{(x^2+1)^k}.$$

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die die Reihe $A(x)$ konvergiert.

b) Für welche reellen Zahlen x konvergiert die Reihe

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n} \text{ ii) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ und}$$

$$iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+2)^n}{5^{n+1} n} \text{ ?}$$