



13. Übung zu Analysis I

Aufgabe 57 – Substitutionsregel:

Verwende die Substitutionsregel, um die folgenden Integrale zu berechnen.

a) $\int_0^1 \frac{6x^2 + 4}{x^3 + 2x + 1} dx$, b) $\int_0^\pi e^{\sin x} \cos x dx$, c) $\int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx$, d) $\int_0^2 \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$.

Aufgabe 58 – Integration:

- a) (i) Skizziere die Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Wie groß ist die Fläche, die von dem Graphen der Funktion und der x -Achse eingeschlossen wird?
(ii) Bestimme mit Hilfe der Substitution $x = \sin(t)$ das Integral

$$\int_{-1}^1 f(x) dx.$$

b) Berechne mittels Substitution $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{5x^2 + 2}} dx$.
(substituiere $t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{5x^2 + 2}$)

(c) Bestimme mittels Substitution $\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$ for $0 < y < 1$.
(substituiere $x = \varphi(t) = \sin t$)

- d) Bestimme das folgende Integral, indem Du eine geeignete Substitution rätst.

$$\int_2^{e^2} \frac{dx}{x \log x}$$

Aufgabe 59 – Uneigentliche Integrale:

Untersuche, ob die folgenden uneigentlichen Integrale existieren und berechne gegebenenfalls ihren Wert.

a) $\int_0^{\pi/2} \cos(x)/\sqrt{\sin(x)} dx$ b) $\int_0^\infty x/(x^2 + 1)^3 dx$ c) $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$

d) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$ und e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^3} dx$

Aufgabe 60 – Beispiel:

Berechne für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ das Integral $\int_a^b |x| dx$.

Aufgabe 61 – Eine besondere Substitution:

Die Hyperbelfunktionen \sinh und \cosh waren definiert als

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{und} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Wir zeigten bereits, dass $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und dass $\sinh x$ eine Umkehrfunktion $f(x) = \operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ hat. (Wenn Du es Dir noch einmal klar machen willst: \sinh ist monoton, zeige $f(\sinh x) = x$)

Berechne mittels Substitution von x durch $\sinh t$

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$